

Министерство образования Российской Федерации
Елецкий государственный университет им. И.А.Бунина

Филимонова Л.В., Быкова Е.А.

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Учебное пособие
(для студентов гуманитарных факультетов ВУЗов)

Елец – 2003г.

УДК 002:372,8
ББК 22.18 я 73
Б 95

Рецензенты:

*Кандидат технических наук, доцент кафедры
естественнонаучных дисциплин МГСУ, филиала
в г. Воронеже **Полев Владислав Александрович***

*Кандидат технических наук, доцент кафедры ВМиИ
ЕГУ им. И.А. Бунина **Быков Сергей Анатольевич***

Филимонова Л.В., Быкова Е.А. Математика и информатика.

Учебное пособие (для студентов гуманитарных факультетов ВУЗов). –
2-е изд. Дополненное и переработанное – Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина,
2001, 110 с.

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся на факультетах, где математика и информатика не являются предметами специализации. Оно составлено с учетом требований государственного стандарта и в нем на доступном уровне изложены некоторые основополагающие вопросы, вошедшие в учебную программу по новому предмету “Математика и информатика”. Данное пособие содержит 11 параграфов, каждый из которых посвящен изучению фундаментальных вопросов математики и информатики. Его цель – воспитать у человека культуру рациональных методов оперирования имеющимися и приобретения новых знаний, ознакомить студентов с некоторыми разделами высшей математики, углубить знания, полученные в школе по информатике и информационным технологиям, дать необходимые сведения о современных аспектах использования ЭВМ и последних достижениях.

© Е.А. Быкова

© Л.В. Филимонова

Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена без письменного разрешения всех владельцев авторских прав.

Введение

В настоящее время постоянно нарастает поток информации. Развитие науки, превращение ее в непосредственную производительную силу, в достояние каждого человека сопровождается увеличением информации, ибо неиссякаем источник, питающий науку, – мир, нас окружающий, неутолима жажда знаний. Бесконечен процесс познания, процесс выработки нового знания, получения новой информации. Умение легко и быстро ориентироваться во все возрастающем потоке научно-технических сведений по своей и смежным специальностям, широко использовать возможности новой, компьютерной техники – одно из важнейших качеств выпускников вуза.

Важнейшей задачей нашего времени становится получение, переработка, передача, хранение, представление и использование информации. Информация становится стратегическим ресурсом общества. Цепью образования становится подготовка человека к полноценной жизни в условиях информационного общества. Поэтому возникла необходимость массового освоения компьютеров.

Умение пользоваться вычислительной техникой при решении профессиональных и учебных задач по праву приравнивается сейчас ко второй грамотности. Это требует наличия у каждого человека элементарных знаний о внутреннем устройстве ЭВМ, ее назначении и возможностях, способах взаимодействия с персональным компьютером; умений самому производить моделирование различных задач, составлять алгоритмы и действующие программы хотя бы на одном языке программирования.

Д. Кнут (Лекции, 1993, с.52) отмечает: «Наука - это знание, настолько понятное нам, что мы могли бы обучить ему вычислительную машину; там, где мы еще не все до конца понимаем, начинается область искусства. Понятие алгоритма или программы чрезвычайно полезный тест глубины наших познаний о каком-то предмете, поэтому превращение искусства в науку означает, что мы способны автоматизировать данную область деятельности».

Информатика - это наука, изучающая законы и методы накопления, передачи и обработки информации с помощью ЭВМ, а также область человеческой деятельности, связанной с применением ЭВМ.

Информатика тесно связана с математикой. Количественные отношения и формы свойственны всем предметам и явлениям материального мира, поэтому можно говорить об универсальности математических методов и приемов мышления. Математика располагает точным символическим языком, позволяющим ей раскрывать как собственную сферу познания, так и сферу познания других наук, в том числе информатики.

В современном мире роль математики существенно возросла. Трудно представить себе какую-нибудь отрасль хозяйства, область науки без этой дисциплины. Даже в социальную сферу математика ворвалась математической статистикой, теорией вероятностей и т. д.

Математика и информатика призваны воспитать у человека культуру рациональных методов оперирования имеющимися и приобретения новых знаний.

Поэтому курс “Математика и информатика” призван ознакомить студентов с некоторыми разделами высшей математики, углубить знания, полученные в школе по информатике и информационным технологиям, дать необходимые сведения о современных аспектах использования ЭВМ и последних достижениях.

§1. Математические предложения и доказательства.

Рассматриваемые в математике истины формулируются в виде предложений. Главнейшие из них следующие: определения, теоремы и аксиомы. Слово «аксиома» происходит от греческого слова *аксиос* и означает утверждение, не вызывающее сомнений.

Опр.1.1 *Определением* называется предложение, в котором разъясняется смысл нового понятия. *Теорема* есть предложение, справедливость которого устанавливается путем некоторого рассуждения, называемого *доказательством*. *Аксиомой* называется истина, принимаемая без доказательства. Непосредственный вывод из аксиомы или теоремы называется *следствием*.

Пример 1.1. Следующие предложения являются определениями, принятыми в математике: 1) всякое целое число, кроме единицы, которое делится только на единицу и само на себя, называется *простым*; 2) *радианной мерой* угла называется отношение длины соответствующей ему дуги окружности, для которой данный угол является центральным, к длине ее радиуса. Аксиомой является предложение: через любые две точки можно провести прямую и только одну. Примером теоремы может служить теорема Пифагора, теоремы синусов и косинусов, теорема о трех перпендикулярах.

В каждой теореме есть условие и заключение. Содержание условия предполагается данным, а утверждение заключения подлежит доказательству.

Пример 1.2. Теорема, выражающая признак равенства треугольников: *Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Приведенная теорема выражена в так называемой *условной* форме. Часто теорема выражается в *категорической* форме. Например: *Вертикальные углы равны.*

Доказательство теоремы состоит в том, что путем построения ряда умозаключений переходят от условия теоремы к ее заключению. При этом опираются на ранее доказанные теоремы, на сформулированные ранее определения и аксиомы. Таким образом, в основе лежит небольшое число аксиом. Аксиомы возникли из опыта, и справедливость их в совокупности, равно как и теорем, доказанных с их помощью, проверяется многократными наблюдениями и длительным опытом.

Рассмотрим известное определение параллелограмма: «Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны».

Исходя из этого определения, можно выделить несколько свойств параллелограмма:

- 1) параллелограмм имеет четыре угла;

- 2) параллелограмм имеет четыре вершины;
- 3) параллелограмм имеет две пары параллельных друг другу сторон.

Но первые два свойства присущи и другим видам четырехугольников. Третье же свойство характеризует именно эту фигуру, выделяет ее из множества всех четырехугольников, полностью определяет параллелограмм и позволяет его построить.

Такое свойство математического объекта называется его *характеристическим свойством*. Любое характеристическое свойство математического объекта может быть принято в качестве его определения. Всякое математическое определение не является высказыванием (относительно определения нельзя сказать, истинно оно или ложно; оно лишь разумно выбрано из нескольких возможных определений). Определения не доказываются.

Пример 1.3. Известно, что корнем степени n из числа a называется число x , n -я степень которого равна a : $x^n = a$. Обозначается символом $\sqrt[n]{a}$. Тогда равенство $(\sqrt[n]{a})^n = a$ непосредственно следует из определения и *не нуждается в доказательстве*.

Основным методом построения современной математики является аксиоматический метод. При составлении какой-либо теории возникает необходимость в уточнении понятий, установлении связей между ними, в сведении сложных понятий к более простым. Например, при определении понятия диаметра окружности: “Диаметром окружности называется хорда, проходящая через центр этой окружности”. Но чтобы это определение стало до конца ясным, надо объяснить термины “окружность”, “хорда”, “центр окружности”. Например, “Окружность – это множество точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от точки O , называемой центром окружности”. Теперь необходимо объяснить слова “точка”, “плоскость”, “расстояние”, “множество”. Если мы станем объяснять каждое встречающееся слово, то этот процесс никогда не кончится. Поэтому при построении математических теорий надо принять некоторые понятия за неопределяемые, основные понятия (первичные термины), и уже с их помощью составлять всю теорию. Так в настоящее время за неопределяемые понятия в математике принято считать понятия “точка”, “прямая”, “расстояние”, “множество”, “число” и т.д.

Аксиоматическое построение того или иного конкретного раздела математики осуществляется следующим образом:

- 1) отбираются так называемые *первичные термины* – конечное число понятий и соотношений между этими понятиями, которые в рамках данной теории не определяются;
- 2) выделяются некоторые первичные утверждения – *аксиомы*, устанавливающие связь между первичными понятиями и соотношениями (и косвенно определяющие их), принимаемые за истинные без доказательства;

- 3) все новые понятия, вводимые в данной теории, должны быть определены через первичные термины или через ранее определенные понятия и соотношения; все новые утверждения теории (термины) должны быть доказаны на основе первичных терминов или аксиом (или предшествующих теорем) путем дедукции. Дедукция – способ рассуждения, посредством которых из общих посылок с необходимостью следует заключение частного характера.

Аксиоматический метод дает возможность строгого обоснования математических теорий; устанавливает глубокие взаимосвязи между математическими объектами, которые он характеризует.

Рассмотрим аксиоматическую теорию построения натурального ряда. Основными неопределяемыми понятиями будем считать: натуральное число, единица, унарная (одноместная) операция «следует за». Натуральные числа будем обозначать строчными латинскими буквами: $a, b, c \dots$. Единицу будем обозначать 1. Число, «следующее за» a будем обозначать a' . Все множество натуральных чисел строится на системе четырех аксиом:

A1. Существует натуральное число, которое не следует ни за каким натуральным числом.

A2. Любое натуральное число следует не более, чем за одним натуральным числом.

A3. Для всякого натурального числа a существует только одно следующее за ним натуральное число a' .

A4. (Аксиома индукции) Если M – подмножество натуральных чисел, содержит единицу и вместе с каждым натуральным числом, содержащемся в M , содержит и следующее за ним натуральное число, то M совпадает с множеством N всех натуральных чисел.

A1-A4 – аксиомы Пеано.

Для записи натуральных чисел пользуются символами:

$1=1, 1'=2, 2'=3, 3'=4$ и т.д.

Во многих разделах арифметики, алгебры, геометрии, анализа приходится доказывать истинность предложений $A(n)$, зависящих от натуральной переменной, для всех значений этой переменной. Доказательство истинности предложения $A(n)$ для всех значений переменной часто удается провести методом математической индукции (ММИ), который основан на следующем принципе.

Предложение $A(n)$ считается истинным для всех натуральных значений переменной, если выполнены следующие два условия:

- 1) предложение $A(n)$ истинно для $n=1$;
- 2) из предположения, что $A(n)$ истинно для $n=k$ (где k – любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего значения $n=k+1$.

Этот принцип называется принципом *математической индукции*.

Под методом математической индукции понимают следующий

способ доказательства. Если требуется доказать истинность предложения $A(n)$ для всех натуральных n , то, во-первых, следует проверить истинность высказывания $A(1)$ и, во-вторых, предположив истинность высказывания $A(k)$, попытаться доказать, что высказывание $A(k+1)$ истинно. Если это удастся доказать, причем доказательство остается справедливым для *каждого* натурального значения k , то в соответствии с принципом математической индукции предложение $A(n)$ признается истинным для всех значений n .

Пример 1.4. Доказать истинность предложения

$$A(n) \equiv \{\text{число } 5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1} \text{ кратно } 19\}, n \in \mathbb{N}.$$

Решение: 1) Высказывание $A(1) \equiv \{\text{число } 5 \cdot 2 + 3^2 \text{ кратно } 19\}$ истинно.

2) Предположим, что для некоторого значения $n=k$

$A(k) \equiv \{\text{число } 5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1} \text{ кратно } 19\}$ истинно. Тогда, так как $5 \cdot 2^{3(k+1)-2} + 3^{3(k+1)-1} = 8 \cdot 5 \cdot 2^{3k-2} + 27 \cdot 3^{3k-1} = 8(5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}) + 19 \cdot 3^{3k-1}$, очевидно, что и $A(k+1)$ истинно. Действительно, первое слагаемое делится на 19 в силу предположения, что $A(k)$ истинно; второе слагаемое тоже делится на 19. Оба условия принципа математической индукции выполнены, следовательно, предложение $A(n)$ истинно при всех значениях n . ♦

Рассмотрим некоторое обобщение принципа математической индукции.

Пусть p – некоторое целое число.

Предложение $A(n)$, где n – целое, истинно для всех целых значений

$n \geq p$, если выполнены следующие два условия:

1. Предложение $A(n)$ истинно для $n = p$.
2. Из предположения, что $A(n)$ истинно для $n = k$ (k – целое, $k \geq p$), следует, что оно истинно для следующего значения $n = k + 1$.

При $p = 1$ получается первоначальная формулировка.

Пример 1.5. Доказать, что любую сумму денег, большую 7 копеек, можно разменять только трехкопеечными и пятикопеечными монетами.

Решение: Пусть сумма равна n копейкам. Если $n=8$, что утверждение верно. Пусть утверждение верно для $n=k$. Могут представиться только два случая для размена суммы в k копеек:

- а) потребовались только трехкопеечные монеты,
- б) потребовалась хотя бы одна пятикопеечная монета.

В случае а) удаляем три трехкопеечные монеты, добавляем две пятикопеечные и тем самым размениваем сумму в $k + 1$ копеек. В случае б) удаляем одну пятикопеечную монету, добавляем две трехкопеечные монеты и тем самым размениваем сумму в $k + 1$ копеек.

Ч.т.д. ♦

Примеры

1. Доказать формулу $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение: 1) При $n=1$ обе части равенства обращаются в единицу и, следовательно, первое условие принципа математической индукции выполнено.

- 2) Предположим, что формула верна при $n=k$, т.е.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства $(k+1)^3$ и преобразуем правую часть. Тогда получим

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + k^3 + (k+1)^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) = \\ &= \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 (k^2 + 4k + 4) = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, из того, что формула верна при $n=k$, следует, что она верна и при $n=k+1$. Это утверждение справедливо при любом натуральном значении k . Итак, второе условие принципа математической индукции выполнено. Формула доказана. ♦

2. Доказать, что при любом натуральном значении переменной при n верно неравенство $2^{n+2} > 2n+5$.

Решение: 1) при $n=1$ получаем верное числовое неравенство

$$2^{1+2} > 2 \cdot 1 + 5, \quad 8 > 7 \text{ (истинно)}.$$

- 2) Предположим, что при $n=k$ верно следующее: $2^{k+2} > 2k+5$.

При $n=k+1$ получим: $2^{k+3} > 2(k+1)+5$

$$2 \cdot 2^{k+2} > 2k+7.$$

Но из предположения следует, что $2 \cdot 2^{k+2} > 4k+10$, тогда имеем $2 \cdot 2^{k+2} > 4k+10 > 2k+7$. Следовательно, второе условие принципа математической индукции выполнено и неравенство справедливо при любом натуральном значении n . Ч.т.д. ♦

Задачи для самостоятельной работы

1. Доказать ММИ следующие утверждения:

- | | |
|--|----------------------------|
| а) $1+2+2^2+2^3+\dots+2^{n-1}=2^n-1$; | д) $(7^n-1) \div 6$; |
| б) $(4^n+15n-1) \div 9$; | е) $n(2n^2-3n+1) \div 6$; |
| в) $(10^n+18n-28) \div 27$; | ж) n^5-n кратно 5; |
| г) $(n^3+11n) \div 6$; | з) n^7-n кратно 7. |

2. При каких натуральных значениях n верны неравенства:

- а) $3^n > 2^n + 7n$; б) $2^n > n^2 + 4n + 5$?

§2. Элементы теории множеств.

п.1 Понятие множества.

Основу теории математики-науки составляют понятия (одни из которых определяются, а другие не определяются, а лишь поясняются на конкретных примерах) и отношения между этими понятиями, которые устанавливаются при помощи соответствующих аксиом и определений. Дальнейшее построение математической теории осуществляется последовательной системой теорем и новых определений, устанавливающей свойства изучаемых математических объектов.

Опр.2.1.1 Одним из фундаментальных, неопределяемых математических понятий является понятие *множества*. Множество можно представить себе как *соединение, совокупность, собрание* некоторых предметов, объединенных по какому-либо признаку (множество учащихся класса, множество букв алфавита, множество цифр десятичной нумерации, множество чисел первого десятка, множество натуральных чисел, множество точек на прямой, множество книг на полке и т.д.).

Опр.2.1.2 Предметы, из которых состоит множество, называются его *элементами* (например, буква К – элемент множества букв русского алфавита).

«...Самое существенное в понятии множества – это акт объединения различных предметов в одно целое, именно в множество М, элементами которого (после акта объединения) будут данные предметы» [Лузин Н.Н. Теория функций действительного переменного. М. Учпедгиз, 1948].

Для названия множества иногда используют какое-либо одно слово, выступающее в роли синонима слова «множество» (зрители, стая, семья, фрукты).

Обозначают множества заглавными буквами латинского алфавита или символически с помощью фигурных скобок, в которых указываются его элементы. Сами элементы некоторого множества будем обозначать малыми латинскими буквами, если они не имеют специальных обозначений:

$A; \{a, b, c\}; \{*, ?, \bullet, \blacksquare\}; N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}.$

Принадлежность предмета некоторому множеству обозначают с помощью символа $\in$ (в противном случае используется символ $\notin$).

Запись $a \in A$ означает, что *a* есть элемент множества *A*. Аналогично имеем: $\Delta \in \{\square, \Delta, o\}.$

Запись $4 \notin \{1, 2, 3\}$ означает, что 4 не принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}.$

Основными способами задания множества являются:

- 1) перечисление всех его элементов: $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\};$
- 2) описание (указание характеристического свойства его элементов). Этот способ требует указания такого признака, который имеется

у всех элементов данного множества и не свойственен элементам, не входящим в данное множество. Например, характеристическим свойством натуральных чисел является возможность их использования при счете каких-либо предметов. Говоря о множестве четных чисел, мы указываем характеристическое свойство его элементов: $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x:2\}$, т.е. каждое число, принадлежащее этому множеству, делится на два.

Опр.2.1.3 Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются *равными* (одинаковыми). Пишут $A=B$.

Опр.2.1.4 Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\emptyset$.

Следует обратить внимание на то, что обиходное слово «много» и математический термин «множество» имеют различный смысл, хотя и звучат почти одинаково. Множество может состоять из небольшого количества элементов. Договоримся обозначать количество элементов в некотором множестве A через $m(A)$. Например, если $A = \{a, b, c\}$, то $m(A)=3$. Если $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел, то $m(\mathbb{N}) = \infty$.

п.2 Подмножество. Основные числовые множества.

Опр.2.2.1 Множество B , состоящее из некоторых элементов данного множества A (и только из них), называется *подмножеством* (частью) этого множества. Иначе, если любой элемент множества B принадлежит также множеству A , то множество B называется подмножеством множества A .

Это записывается так: $B \subset A$ или $A \supset B$. Говорят, что « B – подмножество A » или « B содержится в A » или « A содержит B ». Заметим, что $m(B) \leq m(A)$.

Если в множестве B найдется хотя бы один элемент, не принадлежащий множеству A , то B не является подмножеством множества A : $B \not\subset A$. Например, отрезок $[a, b]$ не является подмножеством полуинтервала $(a, b]$, т.к. $a \in [a, b]$, но $a \notin (a, b]$.

Из опр.2.2.1 следует, что любое множество является подмножеством самого себя, т.е. справедливо утверждение $A \subset A$. Полагают также, что пустое множество является подмножеством любого множества. Пустое множество не содержит ни одного элемента, а значит в нем нет элемента, не принадлежащего любому другому множеству.

Знак $\subset$ называется знаком включения. Отметим основные свойства отношения включения между множествами:

- 1) $\emptyset \subset A$ для любого множества A ;
- 2) $A \subset A$ для любого множества A (рефлексивность);
- 3) из того, что $B \subset A$ не следует $A \subset B$ (не симметричность);
- 4) если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A=B$ (антисимметричность);
- 5) если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ (транзитивность).

Основные числовые множества:

$\mathbf{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbf{Z}=\{\dots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\}$ – множество целых чисел (содержит все натуральные числа и числа, им противоположные), $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$;

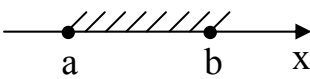
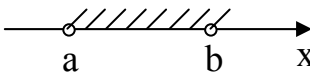
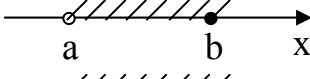
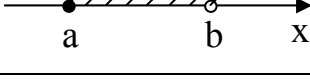
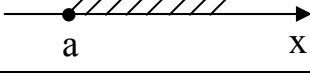
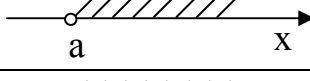
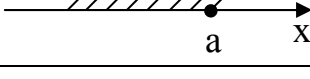
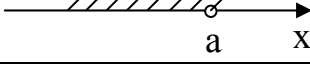
$\mathbf{Q}=\{x \mid x=\frac{p}{q}, \text{ где } p\in\mathbf{Z}, q\in\mathbf{N}\}$ – множество рациональных чисел (со-

стоит из чисел, допускающих представление в виде дроби), $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$;

$\mathbf{R}=(-\infty;+\infty)$ – множество действительных чисел, $\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$ (кроме всех рациональных чисел, содержит иррациональные числа, содержащие в своей записи знаки радикалов: $\sqrt[n]{m}$).

Действительные числа изображаются точками координатной прямой (числовой оси). *Координатная прямая* – это всякая прямая (обычно горизонтальная), на которой указаны положительное направление, начало отсчета и единичный отрезок.

Таблица 1. Правила изображения числовых промежутков.

Название	Неравенство, определяющее множество	Обозначение	Изображение
Отрезок от a до b (замкнутый промежуток)	$a \leq x \leq b$	$[a;b]$	
Интервал от a до b	$a < x < b$	$(a;b)$	
Полуинтервалы от a до b	$a < x \leq b$	$(a;b]$	
	$a \leq x < b$	$[a;b)$	
Числовой луч от a до $+\infty$	$a \leq x$	$[a;+\infty)$	
Открытый числовой луч от a до $+\infty$	$a < x$	$(a;+\infty)$	
Числовой луч от $-\infty$ до a	$x \leq a$	$(-\infty; a]$	
Открытый числовой луч от $-\infty$ до a	$x < a$	$(-\infty; a)$	

п.3 Операции над множествами.

После того, как мы научились составлять и различать множества, можно приступить к определению и других операций над ними. Естественно, что два множества могут иметь одинаковые элементы (их можно выделить в отдельное множество), из всех элементов двух множеств можно составить одно новое множество, также можно рассмотреть отдельно элементы одного множества, которых во втором множестве нет.

Например, A – множество наклеек (марок), которые есть у Пети, B – множество наклеек, которые собрал Вася. Можно выделить множество наклеек, которые есть у обоих ребят; коллекцию различных наклеек, собранных ими вместе; множество наклеек Пети, которых нет у Васи.

Таким образом, мы проделали операции *пересечения*, *объединения* и *разности* двух множеств.

Опр.2.3.1 *Пересечением* множеств A и B называется множество C , состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат каждому из данных множеств: $C = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$. Обозначается, $A \cap B$.

Опр. 2.3.2 *Объединением* множеств A и B называется множество C , которое состоит из всех элементов данных множеств A и B и только из них: $C = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$. Обозначается, $A \cup B$.

Естественно поставить вопрос о нахождении числа элементов в объединенном множестве C . Если множества A и B не содержат одинаковых элементов, т.е. не пересекаются ($A \cap B = \emptyset$), то

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) \quad (1).$$

В противном случае, когда множества имеют $m(A \cap B)$ одинаковых элементов, следует пользоваться более общей формулой:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B) \quad (2).$$

Опр.2.3.3 *Разностью* множеств A и B называется множество C , состоящее из всех элементов множества A , не принадлежащих множеству B : $C = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$. Обозначается, $A \setminus B$.

В случае, когда B является подмножеством A , т.е. $B \subset A$, разность $A \setminus B$ называется *дополнением* множества B до множества A (или относительно множества A).

В каждом отдельном случае мы рассматриваем (изучаем и пр.) всевозможные подмножества одного и того же множества. Например, в начальной школе дети учатся работать (выполнять основные арифметические операции) сначала с числами из первого десятка натуральных чисел, затем из первой сотни и т.д. Но их действия не выходят за рамки натуральных чисел (отрицательные и дробные числа они будут проходить позже). Аналогично, учитель может работать с некоторыми группами учеников, которые будут являться подмножествами определенного множества обучаемых данным учителем школьников. Каждый человек носит различные комбинации вещей, но только из своего личного гардероба. Это основное множество (свое в каждом отдельном случае) называется *универсальным* множеством.

Опр.2.3.4 *Универсальным множеством* называется множество, подмножества которого (и только они) в данный момент рассматриваются. Обозначают, U .

При работе с числовыми множествами, если не дается дополнительных указаний, в качестве основного (универсального) множества

будем считать множество R действительных чисел.

Опр.2.3.5 *Дополнением* множества A называется разность $U \setminus A$. Обозначается, A' или $\bar{A}$ и читается «не- A ». Иначе, дополнением множества A называется множество A' , состоящее из всех элементов, не принадлежащих множеству A .

Теперь укажем основные свойства изученных выше операций над множествами:

Свойства операции пересечения: 1) $A \cap A = A$; 2) $A \cap \emptyset = \emptyset$; 3) $A \cap A' = \emptyset$; 4) $A \cap U = A$; 5) $A \cap B = B \cap A$.	Свойства операции объединения: 1) $A \cup A = A$; 2) $A \cup \emptyset = A$; 3) $A \cup A' = U$; 4) $A \cup U = U$; 5) $A \cup B = B \cup A$.
Свойства операции разности: 1) $A \setminus A = \emptyset$; 2) $A \setminus \emptyset = A$; 3) $A \setminus A' = A$; 4) $A \setminus U = \emptyset$; 5) $U \setminus A = A'$; 6) $\emptyset \setminus A = \emptyset$; 7) $A \setminus B \neq B \setminus A$.	

Справедливы равенства $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (3).

п.4 Диаграммы Эйлера-Венна.

Для наглядного представления (графического изображения) множеств и результатов операций над ними удобно пользоваться так называемыми диаграммами Эйлера-Венна (кругами Эйлера).

При этом множества изображаются на плоскости в виде замкнутых кругов, а универсальное множество в виде прямоугольника. Элементы множества – точки внутри соответствующего круга.

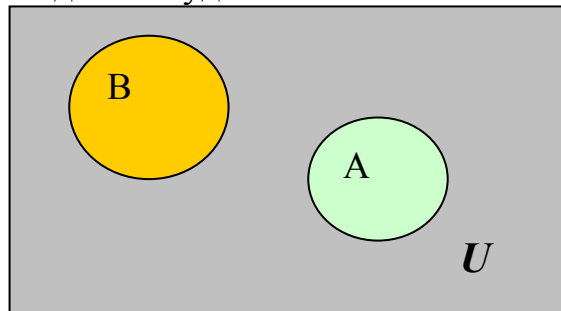


Рис. 1

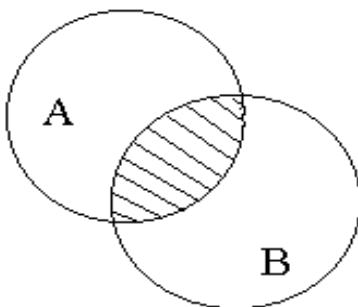


Рис.2 Пересечение множеств

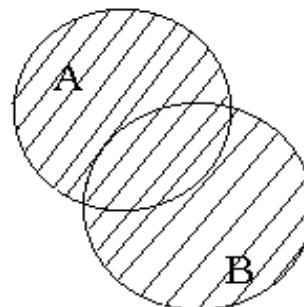


Рис.3 Объединение множеств

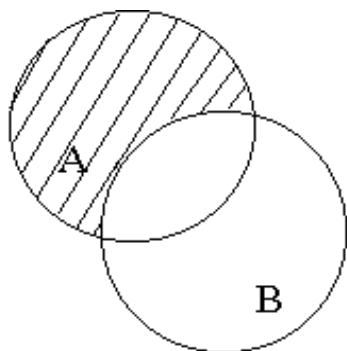
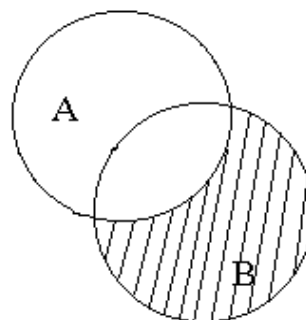
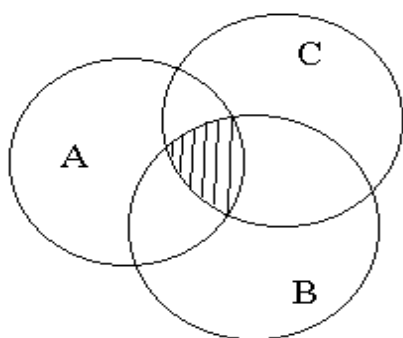
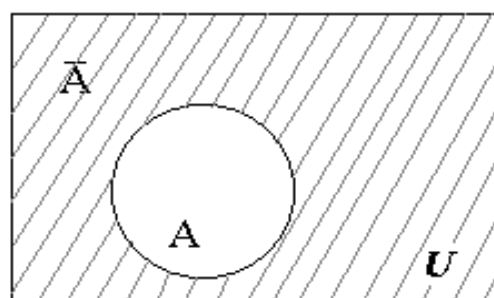
Рис.4 Разность множеств $A \setminus B$ Рис.5 Разность множеств $B \setminus A$ 

Рис.6 Пересечение трех множеств

Рис.7 Дополнение множества
(множество *не-A*)

В заключение приведем еще одну формулу для подсчета числа элементов в объединении трех множеств (для общего случая их взаимного расположения, показанного на рис.6):

$$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C) \quad (4).$$

Примеры

Пример 1. Записать множество всех натуральных делителей числа 15 и найти число его элементов.

Решение: $A = \{1, 3, 5\}$, $m(A) = 3$. ♦

Пример 2. Даны множества $A = \{2, 3, 5, 8, 13, 15\}$, $B = \{1, 3, 4, 8, 16\}$, $C = \{12, 13, 15, 16\}$, $D = \{0, 1, 20\}$. Найти $A \cup B$, $C \cup D$, $B \cap C$, $A \cap D$, $A \setminus C$, $D \setminus B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $B \cup D \cap C$, $A \cap C \setminus D$.

Решение: Будем пользоваться определениями соответствующих операций и учтем, что сначала должна выполняться операция пересечения множеств, а затем уже объединение или разность. Получим

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 15, 16\}$, $C \cup D = \{0, 1, 12, 13, 15, 16, 20\}$, $B \cap C = \{16\}$, $A \cap D = \emptyset$, $A \setminus C = \{2, 3, 5, 8\}$, $D \setminus B = \{0, 20\}$, $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 12, 13, 15, 16\}$, $A \cap B \cap C = \emptyset$, $B \cup D \cap C = \{1, 3, 4, 8, 16\}$, $A \cap C \setminus D = \{13, 15\}$. ♦

Пример 3. Экзамен по математике сдавали 250 абитуриентов,

оценку ниже пяти получили 180 человек, а выдержали этот экзамен 210 абитуриентов. Сколько человек получили оценки 3 и 4?

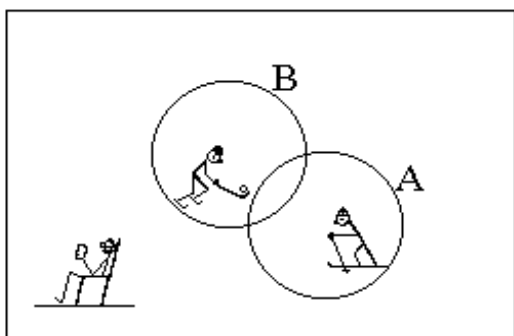
Решение: Пусть A – множество абитуриентов, выдержавших экзамен, B – множество абитуриентов, получивших оценку ниже 5, по условию $m(A)=210$, $m(B)=180$, $m(A \cup B)=250$. Абитуриенты, получившие оценки 3 и 4, образуют множество $A \cap B$. Из формулы (2) находим $m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 210 + 180 - 250 = 140$. ♦

Пример 4. В школе 1400 учеников. Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 – на коньках. Ни на лыжах, ни на коньках не умеют кататься 60 учащихся. Сколько учащихся умеют кататься и на коньках и на лыжах?

Решение: Множество учеников школы будем считать основным множеством U , A и B – соответственно множества учеников, умеющих кататься на лыжах и на коньках (рис. 9).

Учащиеся, не умеющие кататься ни на лыжах, ни на коньках, составляют множество $A' \cap B'$.

$$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 862. \quad \blacklozenge$$



По условию $m(A' \cap B') = 60$, а т.к. по формуле (3) $A' \cap B' = (A \cup B)'$, то и $m(A \cup B)' = 60$. Отсюда

$m(A \cup B) = m(U) - m(A \cup B)' = 1340$. Зная $m(A)$ и $m(B)$, по формуле (2) находим

Пример 5. Показать на кругах Эйлера множество $(A' \cap B') \cup (B \cap C)$.

Решение:

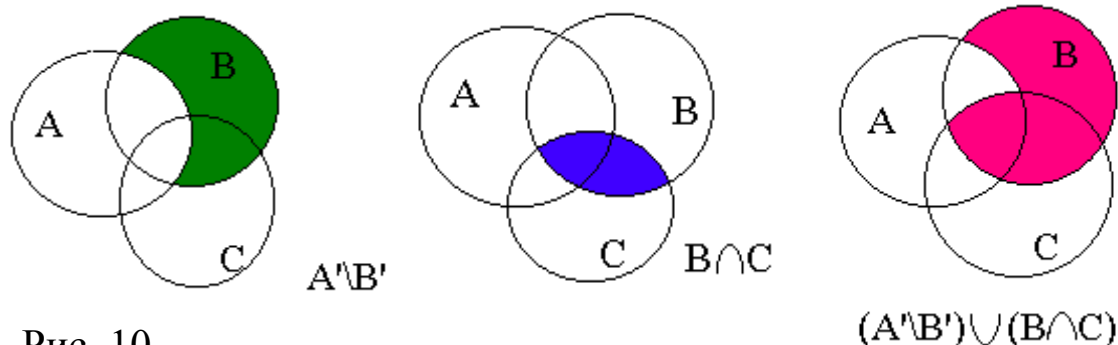


Рис. 10

Задачи для самостоятельной работы.

1. Записать множества A , B и C перечислением их элементов и найти $A \cup B$, $B \cap C$, $(A \cup B) \cap C$, $A \cup B \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus B \cap C$, $(A \setminus B) \cap C$, $(A \cup C) \setminus (C \cap B)$, если: а) A – множество делителей числа 12, B – множество корней уравнения $x^2 - 6x + 5 = 0$, C – множество нечетных чисел x

таких, что $3 \leq x \leq 12$; б) A – множество четных чисел x , $3 < x < 10$; B – множество делителей числа 21, C – множество простых чисел, меньших 12.

2. Даны множества: $A=[-5, 1]$, $B=(0, 4]$, $C=(-7, 0]$, $D=[-3, 0]$, $K=\{1,3,5,7\}$. Найти следующие множества: $A \setminus B$, $B \cup C$, $C \setminus D$, $B \setminus K$, $K \setminus D$, $B \cup C \cap D$, $B \cup K \setminus A$ и изобразить их на координатной прямой.

3. Привести примеры числовых множеств A и B таких, что

а) $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = \emptyset$; б) $A \cup B = A$, $A \cap B = B$.

4. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский язык и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

5. В олимпиаде по математике принимало участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по геометрии, одну – по алгебре и одну – по тригонометрии. Результаты проверки решений представлены в табл.:

Решены задачи	Количество решивших	Решены задачи	Количество решивших
По алгебре	20	по алгебре и геометрии	7
По геометрии	18	по алгебре и тригонометрии	8
По тригонометрии	18	по геометрии и тригонометрии	9

Известно также, что ни одной задачи не решили трое. Сколько учащихся решили все три задачи? Сколько учащихся решили ровно две задачи?

6. В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только пятеро не умеют ни того ни другого. Сколько ребят умеют плавать и играть в шахматы?

7. Среди абитуриентов, выдержавших приемные экзамены в вуз, оценку «отлично» получили: по математике – 48 абитуриентов, по физике – 37, по русскому языку – 42, по математике или физике – 75, по математике или русскому языку – 76, по физике или русскому языку – 66, по всем трем предметам – 4. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку? Сколько из них получили только одну пятерку?

8. Из 100 студентов английский язык изучают 28 человек, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 5, английский и французский – 7, французский и немецкий – 2. Все три языка изучают 3 студента. Сколько студентов не изучают ни одного языка? Сколько студентов изучают только английский (немецкий, французский) язык?

9. Изобразить на кругах Эйлера следующие множества:

а) $(A \cup C) \setminus (B \cap C')$; б) $(A \cap B)' \cup (C \setminus B')$; в) $(A' \cup B') \setminus (C \cap B)$;

г) $(A \cup B') \setminus (C' \cap B)$; д) $(A \setminus B)' \cap (C \cup B)$; е) $(A \cap B') \cup (C \setminus B)$.

10. Даны множества: A – всех трапеций, B – всех прямоугольников, C – четырехугольников, D – квадратов, E – всех параллелограммов, K – всех многоугольников. Выпишите буквы, обозначающие эти множества, в таком порядке, чтобы каждое последующее обозначало подмножество предыдущего.

§ 3. Декартово произведение множеств. Соответствия. Бинарные отношения и их свойства. Отображения.

Рассмотрим следующую реальную ситуацию. Фабрика верхнего трикотажа изготавливает мужские пуловеры, женские костюмы, кофты и платья следующих расцветок: бордо, синяя, голубая, зеленая, коричневая, серая. Обозначим через A множество видов изделий: $A = \{\text{мужской пуловер, женский костюм, кофта, платье}\}$, через B – множество предлагаемых расцветок: $B = \{\text{бордо, синяя, голубая, зеленая, коричневая, серая}\}$. Посмотрим, какие изделия можно получить, учитывая возможные для них расцветки. Для этого составим список всех пар из элементов множества A и элементов множества B таким образом, что сначала будем записывать элемент множества A , затем элемент множества B . получим множество C упорядоченных пар элементов множеств A и B . Возможные изделия можно перечислить с помощью таблицы. Итак, мы имеем дело с особым множеством, составленным из элементов двух данных множеств. Такое произведение называется декартовым произведением двух множеств.

$A \backslash B$	мужской пуловер	женский костюм	Кофта	Платье
Бордо	пуловер-бордо	костюм женский – бордо	кофта-бордо	Платье – бордо
Синяя	пуловер - синий			
Голубая				
Зеленая			кофта – зеленая	
Коричневая				Платье – коричневое
Серая		костюм – серый		

Опр. 3.1 Декартовым (или прямым) произведением множества A на множество B называется множество всех упорядоченных пар, в которых первая компонента – элемент множества A , а вторая – элемент множества B . Обозначают $A \times B$.

Таким образом, $A \times B = \{(\overline{x}, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

Может случиться, что множества A и B окажутся одинаковыми. Рассмотрим следующий пример. Фабрика «Авторучка» изготавливает отдельно корпус и колпачок авторучек следующих цветов: белый, красный, зеленый, оранжевый.

Обозначим через A – множество цветов корпуса ручки, через B – множество цветов колпачка. Тогда получим: $A=B=\{\text{белый, красный, зеленый, оранжевый}\}$. Можно составить список возможных колоритов для авторучки: цвет корпуса и цвет колпачка.

Объединяя всеми возможными способами цвет из A с цветом из $B=A$, получим элементы прямого произведения множества A «самого на себя», которое называется *прямым* или *декартовым квадратом* и обозначается: $A \times A = A^2$.

Из этого примера видно, что каждая пара прямого произведения

должна быть упорядочена: красная ручка с белым колпачком отличается от белой ручки с красным колпачком.

Для описания прямого произведения множеств бывает удобно использовать «геометрический язык». При этом элементы множества $A \times B$ называются *точками*. Например, если $z=(x,y)$, то $x \in A$ называется *абсциссой*, а $y \in B$ – *ординатой точки z*. В связи с этим заметим, что множество точек плоскости по существу являются элементами прямого квадрата $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ множества $\mathbf{R}$ действительных чисел.

На рис.11 точками показаны элементы декартова произведения множеств $A=\{1, 2, 3\}$ и $B=\{4, 5, 6, 7\}$. Отсюда легко видеть способ нахождения общего числа элементов в декартовом произведении двух множеств:

если $m(A)=n$, $m(B)=k$, то $m(A \times B)=n \cdot k$ (5).

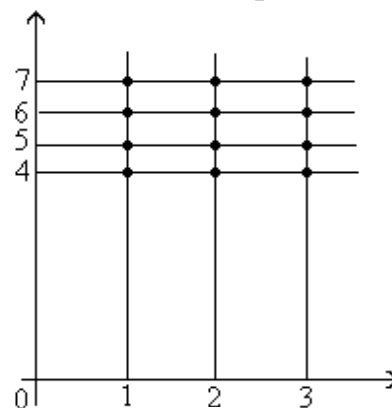


Рис. 11

Пример 3.1. Применим формулу (5) для подсчета количества двухзначных чисел. Двухзначное число можно принять за упорядоченную пару, где на первом месте может стоять цифра из множества $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, а на втором – из множества $B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, т.е. за элемент прямого произведения этих множеств, тогда получаем: $m(A)=9$, $m(B)=10$, то $m(A \times B)=9 \cdot 10=90$. Итак, всего имеется 90 различных двухзначных чисел. ♦

Перейдем к знакомству с другим новым понятием. Рассмотрим два множества: первое (A), состоящее из 11 учащихся, второе (B), состоящее из 9 городов. Чтобы получить прямое произведение этих множеств, надо составить все пары: (ученик – город).

Из множества всех таких пар мы выберем лишь такие, которые «связывают» каждого ученика с тем городом, где он бывал. Очевидно, что «список» таких пар (ученик – известный город) будет являться подмножеством Ω декартова произведения. Такой «список» удобно заменить таблицей, где можно указать все города, в которых побывал каждый ученик:

	Москва	Тула	Одесса	Тамбов	Воронеж	Липецк	Елец	Задонск	Лебедянь
Петя	×	×			×		×		
Вася			×			×	×		
Коля	×				×		×		
Саша			×				×	×	
Лена	×			×			×		
Таня	×				×		×		
Ирина		×					×		
Вера	×						×		
Андрей	×				×		×		
Витя	×	×					×	×	
Катя					×		×		

Можно сказать, что данная таблица задает определенное *соотношение* между элементами множеств A и B .

Опр.3.2 Будем говорить, что между элементами двух множеств A и B установлено *соответствие* ρ , если в их произведении $A \times B$ выделено некоторое подмножество Ω . Если пара $(a, b) \in \Omega \subseteq A \times B$, это означает по определению, что элементы a и b множеств A и B находятся в отношении ρ (пишется $a \rho b$).

Еще один пример соответствия: Пусть даны множества A – студентов и B – множество групп. Утверждение “студент a учится в группе b ” задает соответствие между множеством студентов и множеством групп. Здесь a пробегает множество значений A , b – множество значений B . Такое соотношение называется бинарным соответствием, т.е. соответствием между двумя множествами A и B .

Бинарные соответствия можно задавать таблицами (например, расписание занятий) или ориентированными графами.

	Пн.	Вт.	Ср.
Педагогика			
Математика			
Физкультура			

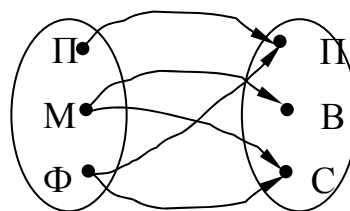


Рис.12.

Если соответствие ρ задано между элементами одного и того же множества, то говорят, что между элементами этого множества задано *отношение* ρ . Итак, задать на множестве A *2-хместное (бинарное) отношение* означает выделить в прямом квадрате A^2 этого множества некоторое подмножество Ω .

Опр.3.3 *Бинарным отношением*, заданным на множестве A называется всякое подмножество декартова произведения $A \times A$.

Местность отношения показывает сколько объектов могут разом находиться в данном отношении. Чаще всего рассматриваются бинарные (двухместные) или тернарные (трехместные) отношения.

Таким образом, бинарные соответствия между X и X называются бинарными отношениями на множестве X , т.е. соответствиями между элементами одного и того же множества (или равных множеств). Например, отношения: “ $2 > 1$ ”, “ $3 = 3$ ”, “человек x старше человека y ” и др.

Пример 3.2. Возьмем в качестве элементов множества A случайную группу людей (например, едущих в одном поезде). И выберем бинарное отношение ρ на этом множестве следующим образом: два человека из A будут находиться в данном отношении, если они родились в одном и том же месяце (под одним знаком зодиака; имеют одинаковые имена и пр.). И еще элемент a_1 из A будет находиться в отношении δ с элементом a_2 из того же множества, если, допустим, первый человек выше ростом, чем второй (старше, тяжелее и пр.).

Из этих примеров можно заметить, что если Таня родилась в

том же месяце, что и Петя, то же самое можно сказать и о Пете: Петя родился в том же месяце, что и Таня. С учетом введенных обозначений можно записать: если Таня ρ Петя, то Петя ρ Таня. Иначе дело обстоит с другим отношением δ : если Таня ростом выше Пети, то неверно, что и Петя ростом выше Тани.

Таким образом, различные отношения могут иметь и различные свойства. Рассмотрим основные из них.

Опр.3.4 Бинарное отношение (БО) ρ , заданное на множестве A , называется *рефлексивным*, если любой элемент этого множества находится в данном отношении с самим собой, т.е. $\forall a \in A: a \rho a$.

Опр.3.5 БО ρ называется *симметричным*, если из того, что пара (a, b) находится в отношении ρ , следует, что и симметричная ей пара (b, a) тоже находится в этом отношении, т.е. $\forall a, b \in A: a \rho b \Rightarrow b \rho a$.

Опр.3.6 БО называется *антисимметричным*, если $\forall a, b \in A: a \rho b \wedge b \rho a \Rightarrow a = b$.

Опр.3.7 БО называется *транзитивным*, если $\forall a, b, c \in A: a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c$.

Примерами рефлексивного и транзитивного отношения является отношение равенства, не симметричного – отношения «больше» или «меньше» на множестве действительных чисел.

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ (ОПРЕДЕЛЕНИЯ)

БО ρ , заданное на Множестве A , является:	Если выполняется Следующее условие:
Рефлексивным	$\forall a \in A \quad a \rho a$
Симметричным	$\forall a, b \in A \quad a \rho b \Rightarrow b \rho a$
Антисимметричным	$\forall a, b \in A \quad a \rho b \wedge b \rho a \Rightarrow a = b$
Транзитивным	$\forall a, b, c \in A \quad a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c$

Опр.3.8 Бинарное отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, называется *отношением эквивалентности* (или просто *эквивалентностью*).

Бинарное отношение ρ можно задать перечислением всех пар из $A \times A$, принадлежащих отношению, указанием характеристического свойства, которым обладают все элементы отношения, а также с помощью так называемого *ориентированного графа*. Для этого элементы множества A изображают в виде точек и вводят соглашение: если $x \rho y$, то от точки x проводят стрелку к точке y . Если $x \rho x$, то начало и конец стрелки совпадают, такую стрелку называют петлей. Выполнив указанные построения, получим фигуру – ориентированный граф. Точки, соединенные стрелками, называются вершинами графа, а сами стрелки – ребрами графа.

Пример 3.3. Пусть на множестве $M = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ задано отношение ρ - кратности элементов, т.е. $x \rho y$, если $x : y$ (x делится на y без остатка). Построить ориентированный граф данного бинарного отноше-

ния.

Решение: Заметим, что по графу (рис. 13) наглядно можно судить о свойствах данного отношения: замкнутые на каждом элементе круглые стрелочки – признак рефлексивности отношения; единственная стрелка (а не с обеих сторон) у линии, соединяющей один элемент данного множества с другим, говорит о том, что отношение не является симметричным; отсутствие хотя бы у одной пары элементов соединяющих их стрелок указывает на то, что отношение не антисимметрично и т.д. ♦

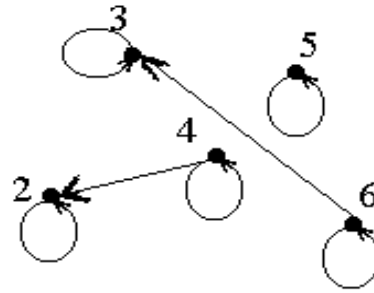


Рис. 13

Рассмотрим еще один частный случай общего понятия “соответствие” – отображение множеств.

Рассмотрим два множества X и Y .

Опр 3.9 Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то такое соответствие называется отображением множества X в множество Y . Т.е., каждому элементу x соответствует только один элемент y (рис.14).

Обозначается отображение множеств так: $f: X \rightarrow Y$, здесь f – символ самого отображения.

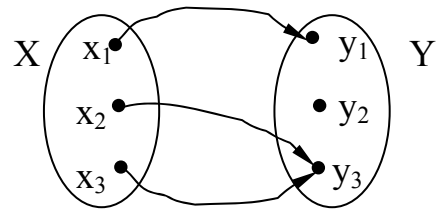


Рис.14

Пример 3.4 Пусть X – множество студентов в аудитории, Y – множество столов в этой аудитории. Соответствие “студент x сидит за столом y ” задает отображение множества X в множество Y . Это очевидно, так как все студенты сидят за столом, иногда по двое, по трое и т.д., но есть и пустые столы. При таком отображении множества X в множество Y , элемент $y \in Y$ называется образом элемента $x \in X$, а элемент $x \in X$ называется прообразом элемента $y \in Y$.

Опр 3.10 Если при отображении f каждый элемент множества Y является образом хотя бы одного элемента из X , то f называют отображением X на Y или сюръективным (рис.15).

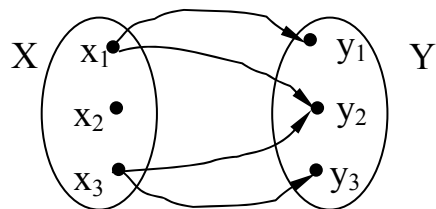


Рис.15

Пример 3.5 Пусть X – множество студентов, Y – множество книг. Соответствие “студенту x принадлежит книга y ” задает сюръективное отображение множества X на множество Y . Это очевидно, так как каждая книга принадлежит одному или нескольким студентам, а некоторые студенты книг не имеют.

Опр 3.11 Если при отображении f все различные элементы множества X переходят в различные элементы множества Y , то отображение f называется инъективным отображением (рис.16).

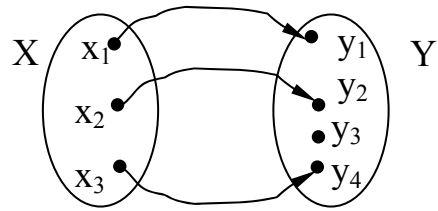


Рис.16

Пример 3.6 Пусть X – множество студентов, Y – множество стульев. Соответствие “студент x сидит на стуле y ” задает инъективное отображение между множествами X и Y . Это очевидно, так как все студенты сидят на стульях, причем каждый на своем, но в аудитории есть и пустые стулья.

Опр 3.12 Если при отображении f каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один элемент $y \in Y$, при этом соответствии каждому элементу $y \in Y$ соответствует единственный элемент $x \in X$, то такое отображение называется взаимно-однозначным (рис.17).

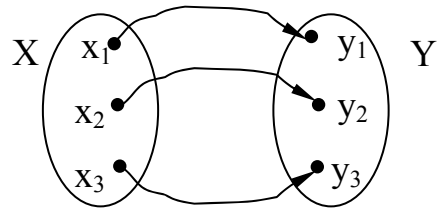


Рис.17

Пример 3.7 Пусть X – множество студентов, Y – множество зачетных книжек. Соответствие “студенту x принадлежит зачетная книжка y ” задает взаимно-однозначное отображение между множествами X и Y . Это очевидно, так как все студенты имеют зачетные книжки, причем каждый только одну и каждая зачетная книжка принадлежит своему студенту.

Пример 3.8 пусть X – множество пальто в гардеробе, а Y – множество крючков в этом гардеробе. Поставим в соответствие каждому пальто крючок, на котором оно висит. Если каждое пальто висит на крючке (а не лежит на полу), то это соответствие является отображением X в Y . Это отображение инъективно, если ни на одном крючке не висит более 1-го пальто (крючки могут быть пустыми), и сюръективно, если все крючки заняты, но на некоторых крючках висит несколько пальто. Это отображение взаимно-однозначно, если на каждом крючке висит одно и только одно пальто.

Примеры

1. Перечислить и указать на координатной плоскости все элементы декартова произведения множеств $A = \{-2, 1, 3\}$ и $B = \{-1, 0, 2, 5\}$.

Решение: $A \times B = \{(-2, -1), (-2, 0), (-2, 2), (-2, 5), (1, -1), (1, 0), (1, 2), (1, 5), (3, -1), (3, 0), (3, 2), (3, 5)\}$.

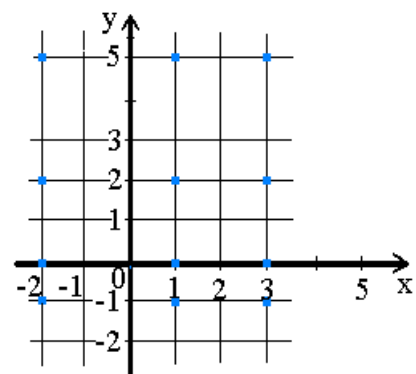


Рис. 18.

Заметим, что точки на координатной плоскости, изображающие элементы декартова произведения $B \times A$, будут симметричны соответствующим точкам из $A \times B$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. ♦

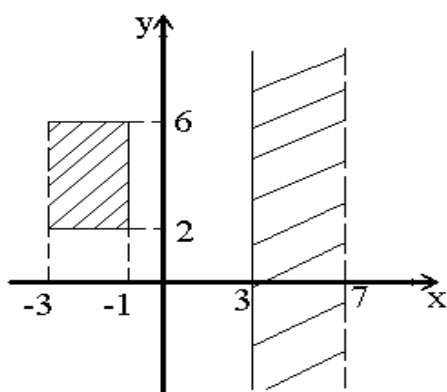


Рис. 19

2. Записать с помощью декартова произведения некоторых множеств фигуры, изображенные на рисунке (рис. 19):

Решение:

- 1) $A \times B$, где $A = (-3, -1]$, $B = [2, 6]$;
- 2) $C \times D$, где $C = [3, 7)$, $D = (-\infty, +\infty)$. ♦

3. Выяснить, какими свойствами обладает бинарное отношение η - «отношение больше» на множестве N .

Решение: Для любых натуральных чисел x и y , если $x > y$.

- 1) $x > x$ – неверно для всех $x \in N$, т.е. данное отношение не является рефлексивным;
- 2) для всякой пары натуральных чисел из $x > y$ не следует $y > x$, т.е. БО не является симметричным;
- 3) для любых $x, y \in N$ выполняется одно из неравенств: $x > y$ или $y > x$, т.е. отношение антисимметрично;
- 4) если $x > y$, а $y > z$, то справедливо $x > z$, т.е. БО транзитивно.

Задачи для самостоятельной работы

1. Записать множества A и B , если известно, что $A \times B = \{(3;1), (-3;4), (0; 2), (1;3), (0;1), (5;7), (0;0), (5;5)\}$. Найти $A \cap B$, $B \setminus A$. Изобразить на координатной прямой элементы множества $B \times A$. Сколько элементов содержится в каждом из рассмотренных множеств?
2. На каком множестве задано БО $\gamma = \{(2;3), (3;5), (5;7)\}$. Что можно сказать о его свойствах?
3. Выберите некоторое множество, задайте на нем БО, постройте для этого отношения ориентированный граф, по графу определите свойства БО.
4. Определить свойства следующих бинарных отношений: 1) ρ - «родство по крови»; 2) σ - «быть знакомым»; 3) отношение « $=$ » - равенства на множестве R (а также $\neq, \geq, <$).
5. Записать с помощью декартова произведения множества точек координатной плоскости, указанные на рис. 20.

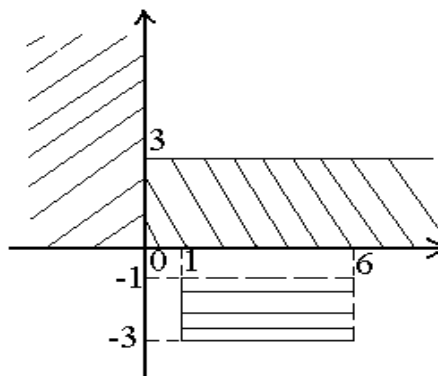


Рис. 20

1. Постройте граф отношения, обладающего указанными ниже свойствами:
 - а) рефлексивность и транзитивность;
 - б) антисимметричность;
 - в) рефлексивность, симметричность и транзитивность.
2. Какие отношения эквивалентности можно задать на множестве $N(R)$? Какими еще свойствами они обладают?
8. Изобразить на координатной плоскости прямое произведение $N \times R$.

§ 4. Элементы комбинаторики. Соединения без повторений и с повторениями. Правила суммы и произведения.

Комбинаторика – теория соединений – изучает некоторые операции над конечными множествами, как упорядочение множества и разбиение множества, интересуется расположением элементов в множестве, выясняет, сколькими способами можно расположить элементы множества в том или ином порядке. Это приводит к понятиям перестановок, размещений и сочетаний. Основными задачами комбинаторики являются: 1) определение вида соединения; 2) подсчет числа соединений.

п.1 Соединения без повторений

Пусть дано множество M , состоящее из n элементов.

Опр. 4.1.1 *Перестановки* – всевозможные упорядоченные множества, составленные из всех элементов данного множества. Число всевозможных перестановок из n элементов обозначают P_n и находят по формуле

$$P_n = n! \quad (1),$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $0! = 1$ по определению.

Пример 4.1.1. Сколько перестановок можно составить из трех букв а, в, с?

Решение: $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Действительно: авс, вас, асв, сав, вса, сва. ♦

Пример 4.1.2. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «треугольник»?

Решение: Т.к. все буквы в данном слове разные, т.е. нет повторений, то можно воспользоваться формулой (1): $P_{11} = 11! = 39916800$. ♦

Опр. 4.1.2 *Размещениями из n по m* называются всевозможные упорядоченные подмножества, содержащие m элементов из данных n . Обозначаются и вычисляются по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1). \quad (2).$$

Пример 4.1.3. Сколько можно составить четырехзначных чисел, содержащих различные цифры из 5 цифр.

Решение: Четырехзначное число – это упорядоченная последо-

вательность цифр, т.е. имеем дело с размещениями без повторений: $A_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$. ♦

Пример 4.1.4. В классе 10 учебных предметов и 5 разных уроков в день. Сколькими способами может быть составлено расписание на 1 день?

Решение: $A_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$. ♦

Опр. 4.1.3 Сочетаниями из n по m называются всевозможные подмножества данных n элементов, состоящие из m элементов. Для подсчета их числа используются следующие обозначение и формула:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{A_n^m}{m!}. \quad (3).$$

Пример 4.1.5. Сколькими способами можно из 7 различных открыток выбрать три?

Решение: Совокупность трех открыток является неупорядоченным подмножеством семи открыток, поэтому имеем дело с сочетаниями:

$$C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35. \quad ♦$$

n.2 Соединения с повторениями

Опр. 4.2.1 Перестановками с повторениями называются перестановки из n элементов, в каждую из которых входит n_1 элементов a , n_2 элементов b , ..., n_k элементов l , где $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Число перестановок с повторениями вычисляется по формуле:

$$\bar{P}_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Пример 4.2.1 Сколькими способами можно переставить буквы в слове “математика”.

Решение: В слове “математика” есть повторяющиеся буквы: “м” – 2 раза, “а” – 3 раза, “т” – 2 раза, “е” – 1 раз, “и” – 1 раз, “к” – 1 раз. Порядок расположения элементов имеет значение (это очевидно, так как если переставить местами 2 буквы, то получатся разные слова) и все элементы используются, следовательно, это перестановка с повторениями.

$$\bar{P}_n(2,3,2,1,1,1) = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{4} = 151200$$

Таким образом, в слове “математика” можно переставить буквы 151200 способами.

Опр 4.2.2 Сочетания из n элементов, в каждое из которых входит m элементов, причем один и тот же элемент может повторяться в каждом сочетании любое число раз, но не более m , называются сочетаниями с повторениями. Число сочетаний с повторениями вычисляется по формуле:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Пример 4.2.2 на почте продаются открытки 10 сортов. Сколько вариантов существует для покупки 12 открыток.

Решение: Порядок расположения элементов не имеет значения, следовательно, это сочетание. А так как открытки в наборе могут повторяться, то это сочетание с повторениями.

$$\overline{C}_{10}^{12} = \frac{(10+12-1)!}{12!(10-1)!} = \frac{21!}{12! \cdot 9!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = 293930.$$

Таким образом, из 10 открыток можно выбрать набор из 12 штук 293930 способами.

Опр 4.2.3 Размещениями с повторениями из n элементов по k элементов называются упорядоченные множества, каждое из которых содержит k необязательно различных элементов из данного множества из n элементов. Число размещений с повторениями вычисляется по формуле:

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Пример 4.2.3 В стену здания вмонтированы 8 гнезд для флажков. В каждое гнездо вставляется либо голубой, либо красный флажок. Сколько различных случаев распределения флажков на здание.

Решение: Так как порядок расположения элементов важен и не все элементы используются в данном соединении, то это размещение. А так как всего 8 гнезд, а флажков 2 вида (голубой и красный), то они будут повторяться, т.е. это размещение с повторением.

$$\overline{A}_2^8 = 2^8 = 256$$

Таким образом, существует 256 способов украсить здание с 8 гнездами флажками двух цветов.

п.3. Правила суммы и произведения

При определении вида соединения удобно пользоваться следующей схемой:



Все расчетные формулы комбинаторики базируются на двух основных правилах:

1. **Правило суммы:** если объект А может быть выбран **n** способами, а объект В – **m** способами, то выбор «А или В» может быть осуществлен **n+m** способами.
2. **Правило произведения:** если объект А может быть выбран **n** способами и после каждого из таких выборов объект В – **m** способами, то выбор «А и В» в указанном порядке может быть осуществлен **n·m** способами.

Пример 4.3.1. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3?

Решение: На первое место в трехзначном числе можно выбрать любую цифру из трех (кроме нуля), после каждого такого выбора на второе место можно поставить любую цифру из оставшихся трех, на третье – из оставшихся двух. По правилу 2 получим: $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ чисел. ♦

Примеры

Пример 1. Сколькими способами можно раскрасить диаграмму из 4 столбцов четырехцветной ручкой так, чтобы каждый столбец был окрашен в определенный цвет.

Решение: Порядок расположения элементов имеет значение и в диаграмме 4 столбца, а ручка тоже четырехцветная, т.е. все элементы присутствуют в соединении, следовательно, это соединение – перестановка. А так как окраска столбцов не повторяется (в условии сказано, что столбцы имеют разные цвета), то это перестановка без повторения. Итак, $P_n = n! = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Ответ: столбцы можно закрасить 24 способами.

Пример 2. Имеется 5 кружков: 3 белых и 2 черных. Сколько различных узоров можно получить, располагая кружки в ряд.

Решение: Порядок расположения элементов имеет значение и в узоре 5 кружков, т.е. все элементы присутствуют в соединении, следовательно, это соединение – перестановка. А так как окраска кружков повторяется (в условии сказано, что 3 белых и 2 черных), то это перестановка с повторением. Итак,

$$\bar{P}_n(3,2) = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10$$

Ответ: узор можно составить 10 способами.

Пример 3. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнить перевод с любого из 5 языков на любой из 5 языков.

Решение: Порядок имеет значение (так как русско-английский и англо-русский словари различны) и не все элементы присутствуют в со-

единении (а только 2 из 5), значит, это размещение. Так как языки различны, то это размещение без повторения. Итак, $A_5^2 = \frac{5!}{3!} = \frac{4 \cdot 5}{1} = 20$.

Ответ: надо составить 20 словарей.

Пример 4. На железнодорожной станции имеется 5 светофоров. Сколько может быть дано различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния.

Решение: Порядок имеет значение и не все элементы присутствуют в соединении, значит, это размещение. Так как цвета повторяются, то это размещение с повторением. Итак, $\bar{A}_3^5 = 3^5 = 243$.

Ответ: может быть дано 243 различных комбинаций цветов.

Пример 5. 12 человек играли в городки. Сколькими способами они могут разбиться на команды по 4 человека в каждой.

Решение: Порядок расположения игроков в команде не имеет значения, следовательно, это сочетание. А так как игроки не повторяются (все члены команды различные люди), то это сочетание без повторения. Итак, $C_{12}^4 = \frac{12!}{4!8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$.

Ответ: игроки могут разбиться на команды по 4 человека в каждой 495 способами.

Пример 6. В цветочном магазине продаются цветы 6 видов. Сколько можно составить букетов из 10 цветов в каждом (букеты отличающиеся лишь расположением цветов считать одинаковыми).

Решение: Порядок расположения цветов в букете не имеет значения, следовательно, это сочетание. А так как цветы повторяются, то это сочетание с повторением. Итак, $\bar{C}_6^{10} = \frac{15!}{10!5!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3003$.

Ответ: букеты можно составить 3003 способами.

Пример 7. В группе 25 студентов, из которых 5 отличников, 11 хорошистов и остальные троечники. Сколькими способами можно выбрать группу для выполнения лабораторной работы, состоящей из 3 хорошистов, 1 отличника и 1 троечника.

Решение: Сначала узнаем сколькими способами можно выбрать 3 хорошистов из 11 человек. Порядок расположения студентов не важен, значит, это сочетание. А так как люди в группе не повторяются, то это соединение – сочетание без повторения. Итак, одного хорошиста

можно выбрать $C_{11}^3 = \frac{11!}{3!8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165$ способами. Аналогично рассуждая, приходим к тому, что 1 отличника можно выбрать

$C_5^1 = \frac{5!}{1!4!} = 5$ способами и одного троечника можно выбрать $C_4^1 = \frac{4!}{1!3!} = 4$

способами. Так как команда для выполнения лабораторной работы выбирается одновременно, т.е. 5 хорошистов, затем 1 отличник, затем 1 троечник, то, применив правило произведения, получим: $C_{11}^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 = 165 \cdot 5 \cdot 4 = 3300$ способами.

Ответ: группу для выполнения лабораторной работы можно составить 3300 способами.

Пример 8: Имеется 4 чашки, 5 блюдец, 6 ложек (все чашки, блюда, ложки различны). Сколькими способами можно накрыть стол к чаю на 3 человека, если каждый получает 1 чашку, 1 блюдо и 1 ложку.

Решение: Выберем для 3 человек чашки из 4 имеющихся. Порядок расположения элементов имеет значение, и не все элементы входят в соединение, значит, это размещение. Но так чашки не повторяются, то это размещение без повторения. Итак, из 4 чашек 3 можно выбрать

$$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ способами. Аналогично рассуждая, получим,}$$

что из 5 блюдец 3 можно выбрать $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ способами, а

из 6 ложек 3 можно выбрать $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ способами. Так

блюдец, чашка и ложка входят в набор одновременно, то стол можно накрыть $A_4^3 \cdot A_5^3 \cdot A_6^3 = 24 \cdot 60 \cdot 120 = 172800$ способами.

Ответ: стол можно накрыть 172800 способами.

Задачи для самостоятельной работы

1. Сколькими способами 10 человек могут стать в очередь друг за другом?
2. В бригаде – 9 человек. Из них надо выбрать бригадира и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?
3. В отделении 12 солдат. Сколькими способами можно составить наряд из трех человек?
4. 12 человек играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на команды по 4 человека.
5. В состав сборной включены 2 вратаря, 5 защитников, 6 полузащитников, 6 нападающих. Сколькими способами тренер может выставить на поле команду, в которую входит: 1 вратарь, 3 защитника, 4 полузащитника, 3 нападающих?
6. В классе 10 девочек и 14 мальчиков. Сколькими способами можно выбрать: а) 2 девочки и одного мальчика; б) 5 девочек или 3 мальчиков; в) 10 девочек и не менее 10 мальчиков?
7. В киоске союзпечати имеется в продаже 8 наименований газет и 3 вида журналов. Сколькими способами можно купить 2 газеты и хотя бы один журнал?
8. Сколькими способами можно составить список различных фамилий 5 человек?
9. Каким числом способов можно рассадить 8 гостей на имеющихся 8 стульях? И 6 гостей на 8 стульях?
10. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены оценки, если известно, что никто не получил 2.

11. Автомобильные номера состоят из 3 букв (всего используется 30 букв) и 3 цифр (всего используется 10 цифр). Сколько автомобилей можно занумеровать таким образом, считая, что никакие 2 автомобиля не имеют одинаковые номера.
12. Сколько диагоналей имеет выпуклый десятиугольник.
13. Сейф запирается на замок, состоящий из 5 дисков, на каждом из которых изображены цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Замок открывается, если на дисках набрана одна определенная комбинация цифр. Хватит ли 10 дней на открытие сейфа, если “рабочий день” продолжается 13 часов, а на набор одной комбинации цифр уходит 5 секунд.
14. У мальчика имеется 15 юбилейных монет: 6 монет с изображением Волгограда, 4 монеты с изображением Бреста, а остальные с изображением Тулы. Сколькими способами мальчик может составить коллекцию из всех своих монет.
15. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен 300, а ребенку дают не более трех имен.
16. Сколько чисел, больших 100, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, если в каждом числе каждая цифра используется не более одного раза.

§ 5. Элементы теории вероятностей.

п.1 Классическое и статистическое определения вероятности.

Теория вероятностей изучает количественные закономерности, которым подчиняются совокупности большого числа объектов. Вероятностный и статистический метод в науке позволяет более глубоко анализировать массовые явления с учетом случайностей и все чаще применяется в различных отраслях науки.

Первичным (неопределяемым) понятием в теории вероятностей является понятие события. Под *событием* понимается всякое явление, о котором имеет смысл говорить, что оно происходит (имеет место) или не происходит. Событиями являются и результаты различных опытов, наблюдений и измерений. Например:

- 1) из ящика с разноцветными шарами наугад вытаскивают черный шар;
- 2) на один из приобретенных лотерейных билетов выпал выигрыш;
- 3) при бросании игральной кости выпала цифра 7.

События делятся на достоверные, случайные и невозможные.

Опр. 5.1.1 Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет в данном испытании. Событие называется *случайным*, если оно может произойти, но может и не произойти в данном

испытании. Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти в данном испытании.

Наступление каждого события зависит от многих факторов, заранее учесть которые обычно невозможно. Однако в случае совокупности однородных (массовых) событий можно обнаружить закономерности, позволяющие предсказать, насколько достоверно наступление того или иного события, т.е. насколько это событие вероятно.

Понятие вероятности вводится для того, чтобы выражать на языке чисел степень возможности наступления тех или иных событий.

За единицу принимают вероятность достоверного события, а вероятность невозможного события считают равной нулю. Тогда вероятность P любого события A удовлетворяет неравенству:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Опр. 5.1.2 События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого (всех остальных).

Пример 5.1.1. Опыт состоит в подбрасывании монеты, событие A – выпадение орла, событие B – выпадение решки. Эти события несовместны.

Этот же пример иллюстрирует события, называемые *равновозможными*, – ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Опр. 5.1.3 События $A, B, C, \dots, K$ называются *единственно возможными*, если в результате опыта хотя бы одно из них обязательно наступит. Говорят, что единственно возможные события образуют *полную группу* событий.

Рассмотрим классический метод определения вероятности некоторого случайного события. Пусть в результате некоторого опыта могут наступить события $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ (*элементарные исходы опыта*), которые являются: 1) единственно возможными, т.е. в результате опыта хотя бы одно из них обязательно наступит; 2) несовместными, т.е. появление одного из них исключает появление всех остальных; 3) равновозможными, т.е. не существует никаких причин, в связи с которыми одно из событий появлялось бы чаще, чем остальные.

Пусть при появлении некоторых из этих событий наступает событие A . Обозначим число таких событий k ($k \leq n$). А при появлении остальных $(n-k)$ событий событие A не наступает. Говорят, что k событий (элементарных исходов), при которых появляется событие A , благоприятствуют событию A , а остальные $(n-k)$ событий не благоприятствуют ему.

Опр. 5.1.4 (**классическое определение вероятности**). *Вероятностью события A* называется отношение числа k элементарных исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу элементарных исходов испытания n , если они равновозможны, несовместны и единственно возможны. Обозначают:

$$P(A) = \frac{k}{n} \quad (1)$$

(от латинского слова probabilitas – вероятность).

Пример 5.1.2. Набирая номер телефона, вы забыли последнюю цифру и набрали ее наугад. Какова вероятность того, что набрана нужная цифра?

Решение: Ясно, что число всех элементарных исходов $n=10$. Все они равновозможны, несовместны и единственно возможны. Поэтому можно применить классическое определение вероятности. Число благоприятствующих исходов $k=1$. Поэтому $P(A) = \frac{1}{10}$. ♦

Пример 5.1.3 Из слова “математика” выбирается наугад одна буква. Какова вероятность того, что это будет буква «м»?

Решение: Пусть событие A – состоит в случайном выборе из данного слова буквы «м», тогда, т.к. $n=10$ и $k=2$, то $P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. ♦

В случае, когда условия опр.5.1.4 не выполняются или когда множество рассматриваемых элементарных событий не является конечным, классическое определение вероятности не применимо. Так в ряде задач условие равновозможности не выполняется или установить эту равновозможность бывает затруднительно. Тогда пользуются *статистическим определением вероятности*, которое связано с понятием относительной частоты появления события.

Опр. 5.1.5 *Частотой события A в данной серии испытаний называется отношение числа K испытаний, в которых это событие появилось, к общему числу N фактически проведенных испытаний:*

$$W(A) = \frac{K}{N}. \quad (2)$$

Заметим, что вероятность по опр.5.1.4 вычисляют до опыта, а частоту после опыта. При небольшом числе испытаний частота событий во многом случайна, но при его увеличении ее значение приближается к некоторому постоянному числу (это многократно проверялось на опыте). Т.к. вероятность события объективно характеризует степень его возможности, то при достаточно большом числе испытаний частота практически равна вероятности. Т.о. *частоту события A называют статистической вероятностью этого события.*

п.2 Сумма событий. Теорема сложения вероятностей.

Часто при вычислении вероятности события бывает удобно представить его в виде комбинации более простых событий.

Опр. 5.2.1 *Суммой ($A+B$) двух событий*, называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них.

Пример 5.2.1 Если попадание в цель при первом выстреле есть событие A , а B – попадание при втором выстреле, то хотя бы одно попадание в цель при двух выстрелах есть сумма данных событий $A+B$.

Понятие суммы событий можно проиллюстрировать на диаграммах Эйлера-Венна. Пусть событию A соответствует взятие наугад точки плоскости из области A , а событию B – взятие точки из области B , то сумме событий соответствует попадание точки в область $A \cup B$

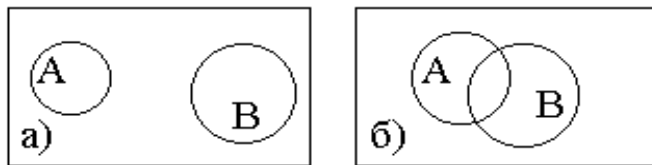


Рис. 21

(рис. 21). Причем а) соответствует случаю несовместных событий, а б) – для совместных событий.

Теорема 5.2.1.

(сложения вероятностей)

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$ (3).

Данная теорема справедлива для любого конечного числа событий.

Опр. 5.2.2 Событие A называется *противоположным* событию A , если оно состоит в том, что событие A не происходит.

Противоположные события всегда несовместны. Легко видеть, что $P(A+A) = P(A) + P(A) = 1$ (4).

Пример 5.2.2. В лотерее 1000 билетов. На 20 из них падает вещевой выигрыш, на 10 – денежный. Найти вероятность выигрыша на один купленный билет.

Решение: Пусть событие A состоит в том, что на купленный билет выпадет вещевой выигрыш, событие B – денежный. Тогда $A+B$ – купленный билет окажется выигрышным. События A и B несовместны, поэтому можно применить теорему 1 для вычисления искомой вероятности:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{20}{1000} + \frac{10}{1000} = \frac{30}{1000} = 0,03. \quad \blacklozenge$$

Теорема сложения для совместных событий будет рассмотрена ниже.

п.3 Произведение событий. Теорема умножения вероятностей.

Опр. 5.3.1 *Произведением двух событий* A и B называется событие $A \cdot B$, состоящее в совместном появлении этих событий. Произведением нескольких событий называется событие наступления всех этих событий.

Например, двукратное попадание в цель есть произведение двух событий.

При рассмотрении совместного наступления нескольких событий возможны случаи, когда появление одного из них сказывается на возможности появления другого. Например, если осенью день солнечный, то менее вероятно, что погода испортится (начнется дождь). Если же солнца не видно, то больше шансов, что пойдет дождь.

Опр. 5.3.2 Событие А называется *независимым от* события В, если вероятность события А не меняется в зависимости от того, произошло или нет событие В. Иначе событие А называется *зависимым* от события В. Два события А и В называются *независимыми*, если вероятность одного из них не зависит от появления или не появления другого, *зависимыми* – в противном случае.

Теорема 5.3.1. (умножения вероятностей) Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \quad (5).$$

Эта теорема справедлива для любого конечного числа событий, если только они *независимы в совокупности*, т.е. вероятность любого из них не зависит от того, произошли или нет другие из этих событий.

Опр. 5.3.3 Вероятность события А, вычисленная при условии, что имеет место событие В, называется *условной вероятностью* события А при условии появления В и обозначается $P_B(A)$.

Теорема 5.3.2. Вероятность появления произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие произошло:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A) \quad (6).$$

Пример 5.3.1. Ученик дважды извлекает по одному билету из 34. Какова вероятность того, что он сдаст экзамен, если им подготовлено 30 билетов и в первый раз вынут неудачный билет?

Решение: Пусть событие А состоит в том, что в первый раз достался неудачный билет, событие В – во второй раз вынут удачный билет. Тогда $A \cdot B$ – ученик сдаст экзамен (при указанных обстоятельствах). События А и В зависимы, т.к. вероятность выбора удачного билета со второй попытки зависит от исхода первого выбора. Поэтому используем формулу (6):

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{4}{34} \cdot \frac{30}{33} = \frac{20}{187}. \quad \blacklozenge$$

Заметим, что полученная в решении вероятность $\approx 0,107$. Почему так мала вероятность сдачи экзамена, если выучено 30 билетов из 34 и дается две попытки?!

Теорема 5.3.3. (расширенная теорема сложения) Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления (произведения):

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \quad (7).$$

Пример 5.3.2. В электрическую цепь последовательно включены 2 предохранителя. Вероятность выхода первого из строя равна 0,6; второго – 0,2. Найти вероятность прекращения питания в результате выхода из строя хотя бы одного из предохранителей.

Решение: Событие A – выход из строя первого предохранителя, B – второго, $A+B$ – выход из строя хотя бы одного из них. События A и B совместны и независимы, поэтому по теореме 3 получим:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0,6 + 0,2 - 0,6 \cdot 0,2 = 0,68. \blacklozenge$$

п.4 Формула полной вероятности. Формула Байесса.

Формула Бернулли.

Формула полной вероятности является следствием теорем сложения и умножения вероятностей.

Пусть некоторое событие A происходит только с каким-нибудь одним из событий $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$, которые образуют полную группу событий и называются *гипотезами*. В этом случае событие A можно представить в виде: $A = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + A \cdot H_3 + \dots + A \cdot H_n$. Отсюда, применяя теоремы сложения и умножения вероятностей и учитывая, что гипотезы попарно несовместны, получим:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) \quad (8),$$

которая называется *формулой полной вероятности*. Используя формулы (6) и (8), можно получить *формулу Байесса (формулу вероятности гипотез)*:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (9).$$

Пример 5.4.1. В районе имеется три хлебных магазина. Вероятность того, что человек пойдет за хлебом в первый магазин, равна 0,5; во второй – 0,3; в третий – 0,2. Вероятность купить в магазинах свежий хлеб равна соответственно 0,7; 0,5 и 0,3. Человек пошел за хлебом. Найти вероятность того, что он купит свежий хлеб.

Решение: Обозначим A – событие, состоящее в том, что человек купит свежий хлеб; H_1 – покупка была сделана в первом магазине, H_2 – во втором, H_3 – в третьем. Из условия задачи известны: $P(H_1)=0,5$; $P(H_2)=0,3$; $P(H_3)=0,2$, а также $P_{H_1}(A) = 0,7$, $P_{H_2}(A) = 0,5$, $P_{H_3}(A) = 0,3$. По формуле полной вероятности имеем:

$$P(A) = 0,5 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,56. \blacklozenge$$

Пример 5.4.2. Данные из предыдущего примера. Известно, что человек купил свежий хлеб. Найти вероятность того, что покупка сделана в первом магазине.

Решение: Используя полученные выше результаты, по формуле (9) находим: $P(H_1) = \frac{0,5 \cdot 0,7}{0,56} = \frac{5}{8} = 0,625. \blacklozenge$

Если производится несколько опытов, вероятность появления события A в каждом из которых постоянна и не зависит от исходов остальных опытов, то такие опыты называются *независимыми от события A* .

Пусть производится n независимых опытов, вероятность появления события A в каждом из которых постоянна и равна p . Тогда вероятность его не появления в каждом из опытов также постоянна и равна $1-p=q$. Требуется найти вероятность того, что в n опытах событие A появится ровно m раз и не появится $n-m$ раз. Формула для ее нахождения: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ (10), называется формулой Я. Бернулли.

Пример 5.4.3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет $p=0,8$. Найти вероятность 7 попаданий при 10 выстрелах.

Решение: Здесь $n=10$, $m=7$, $p=0,8$, $q=1-0,8=0,2$. По формуле (10) находим: $P_{10}(7) = \frac{10!}{7!(10-7)!} \cdot (0,8)^7 \cdot (0,2)^{10-7} = \frac{10!}{7!3!} \cdot (0,8)^7 \cdot (0,2)^3 = 0,2$. ♦

Задачи для самостоятельной работы

1. В урне находится 8 белых и 12 черных шаров. Наугад один за другим извлекают два шара. Найти вероятность того, что: 1) оба шара окажутся черными; 2) шары будут разного цвета; 3) первый шар будет черным; 4) второй шар – белый.

2. Решить предыдущую задачу при условии, что шары извлекаются одновременно.

3. В ящике находится 24 детали, причем 15 из них стандартные. Найти вероятность того, что с двух попыток (а также со второй попытки) будет извлечена стандартная деталь.

4. В первом ящике находится 12 белых и 6 черных шаров, а во втором 15 белых и 3 черных. Найти вероятность того, что из случайно выбранного ящика будет извлечен белый шар.

5. Найти вероятность того, что с третьей попытки будет угадано задуманное однозначное число.

6. В ящике в случайном порядке расположены 20 деталей, причем 5 из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из них окажется стандартной.

7. На карточках написаны буквы «к», «н», «т», «и», «о». Найти вероятность того, что из наугад выбранных и разложенных в ряд трех карточек сложится слово «ток».

8. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.

9. В ящике находится три вида деталей: 10 штук – первого, 15 – второго, 5 – третьего вида. Найти вероятность того, что из двух извлеченных деталей одна окажется первого, а другая третьего вида.

10. В классе 7 отличников, 14 хорошистов, 3 троечника. Вероятности для них ответить на вопрос учителя соответственно равны

0,9; 0,5; 0,3. Какова вероятность того, что наугад вызванный ученик ответит на вопрос? И если случайно вызванный ученик ответил на вопрос, то какова вероятность того, что это был хорошист?

11. Ученик забыл тетрадь в одном из кабинетов. Вероятность забыть ее в первом из них равна 0,5; во втором – 0,2; в третьем – 0,7. Какова вероятность того, что тетрадь забыта во втором кабинете.

12. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,15. Какова вероятность того. Что по крайней мере один из 4 билетов окажется выигрышным?

§ 6. Элементы векторной алгебры.

Вместе со скалярными величинами, или числами, в математике вводится понятие векторной величины, или вектора. В различных учебных пособиях можно встретить несколько отличающихся определений понятия «вектор». В самом простом варианте *вектором* называют направленный отрезок. Таким образом, вектор характеризуется

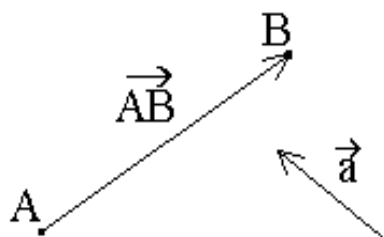


Рис. 22

двумя параметрами: длиной отрезка (или *модулем*) и направлением. Вектор имеет начало и конец. Обозначают вектора или упорядоченной парой больших букв, соответствующих точкам начала и конца вектора, или маленькой латинской буквой, причем над обозначением ставится стрелочка или сама буква выделяется жирным шрифтом. Рисуют вектор в виде стрелки определенной длины (см. рис.22).

Опр. 6.1 Два вектора называются *равными*, если они имеют одинаковые длину и направление (рис. 23).

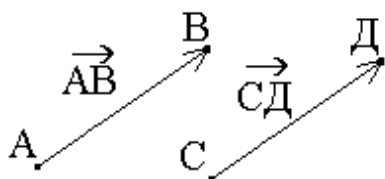


Рис. 23

Следуя этому определению, заметим, что два направленных отрезка, равных по длине и одинаковых по направлению изображают один и тот же вектор. Это же можно сказать и о большем числе векторов. Так мы приходим к новому определению вектора.

Опр. 6.2 Вектором называется вся совокупность направленных отрезков, любые два из которой одинаково направлены и равны по длине.

Замечание. Если на множестве направленных отрезков рассмотреть бинарное отношение «равенство по длине и по направлению», то, очевидно, оно является эквивалентностью (см. опр. 3.8).

Опр. 6.3 Вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Два вектора называются *сонаправленными*, если при этом они направлены в одну и ту же сторону, и *противоположно направленными*, если, будучи коллинеарными,

они имеют разное направление.

Опр. 6.4 Два вектора называются *противоположными*, если они противоположно направлены и равны по длине.

Рассмотрим вектор на координатной плоскости. Проецируя его на координатные оси, получим соответствующие проекции. Длины

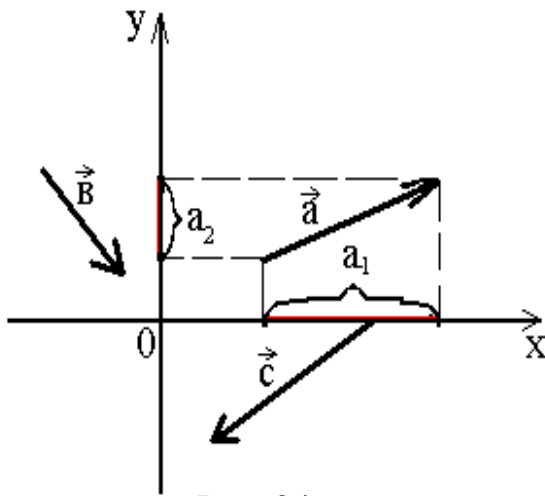


Рис. 24

этих проекций с учетом знаков (« + » – если направление проекции совпадает с положительным направлением координатной оси, и « – » – в противном случае) называются *координатами вектора*. Координаты вектора записывают рядом с его обозначением в круглых скобках. Например, $\vec{a}(a_1, a_2)$. На рис. 24: обе координаты первого вектора положительны, у вектора $\vec{b}$ – вторая координата отрицательна, у $\vec{c}$ – обе отрицательны.

Если известны координаты начала и конца вектора, то, чтобы найти координаты самого вектора, надо из координат конца соответственно вычесть координаты начала.

Напомним, что число, равное длине вектора, называется *модулем вектора*. Справедлива формула: $|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$ (1).

Равные вектора имеют одни и те же координаты. Координаты противоположных векторов – противоположны, т.е. имеют противоположный знак. Координаты коллинеарных векторов – пропорциональны, т.е. $\frac{a_1}{a_1'} = \frac{a_2}{a_2'}$.

Вектора можно складывать, вычитать, умножать на число.

Опр. 6.5 Суммой двух (или более) векторов называется вектор, построенный по определенным правилам. Такими правилами служат *правило треугольника*, *правило параллелограмма*, *правило многоугольника*. Координаты вектора суммы равны сумме соответственных координат слагаемых.

Правило треугольника: чтобы найти сумму двух векторов, надо от конца одного вектора отложить другой вектор и из начала первого в конец второго провести искомый вектор (рис. 25а).

Правило параллелограмма: оба вектора откладываются от одной точки, полученную фигуру достраивают до параллелограмма и из той же точки проводят диагональ – вектор, равный искомой сумме (рис. 25б).

Правило многоугольника (является обобщением правила треугольника на случай сложения более двух векторов): построить первый вектор, из его конца провести второй вектор, от конца второго

вектора отложить третий вектор и т.д., тогда, соединив начало первого вектора с концом последнего в указанном порядке, получим искомый вектор суммы (рис. 25в).

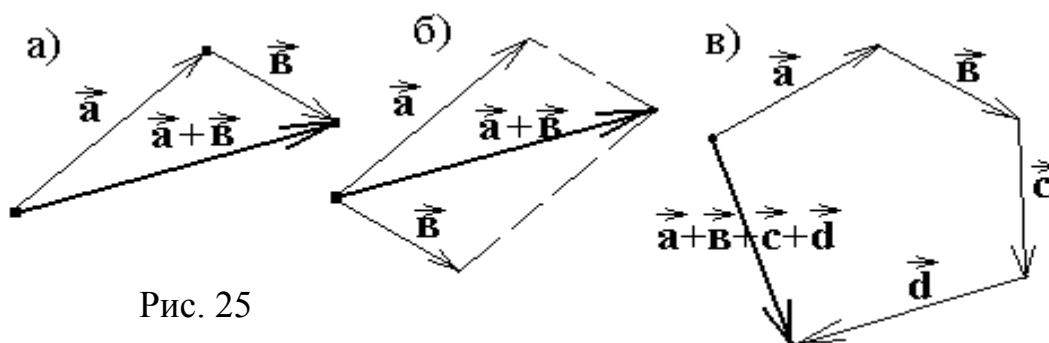


Рис. 25

Опр. 6.6 Разностью двух векторов называется вектор, равный сумме первого вектора и вектора, противоположного второму, т.е. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Координаты вектора разности равны разности соответствующих координат.

Опр. 6.7 Умножение вектора на положительное число λ не меняет его направления, а его длину увеличивает в λ раз, если $\lambda > 1$, и уменьшает в $1/\lambda$ раз, если $0 < \lambda < 1$. Если λ - отрицательное число, то направление вектора меняется на противоположное. Чтобы узнать координаты вектора, умноженного на число, надо каждую его координату умножить на это число (рис.26).

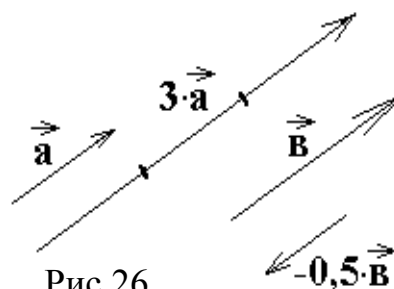


Рис.26

Опр. 6.8 Скалярным произведением векторов называется **число**, равное произведению их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha \quad (2);$$

Если вектора заданы своими координатами, то их скалярное произведение равно сумме произведений соответственных координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \quad (3).$$

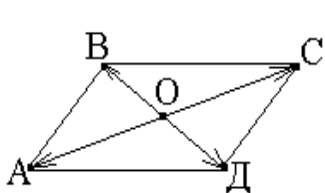
Из этих формул следует формула для нахождения угла между векторами:

$$\cos \alpha = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (4).$$

Примеры

Пример 1. В параллелограмме ABCD диагонали пересекаются в точке O. Найти сумму векторов $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ и $\vec{OD}$.

Решение:



$$\vec{OA} = -\vec{OC}; \vec{OB} = -\vec{OD}$$

Противоположные вектора в сумме дают нулевой вектор.

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$$

Пример 2. Определить длины векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ и угол между ними, если $\vec{a} = (3; -5; 8)$, $\vec{b} = (-1; 1; -4)$.

Решение: Прежде найдем координаты указанных векторов: $\vec{a} + \vec{b} = (3-1; -5+1; 8-4) = (2; -4; 4)$, аналогично, $\vec{a} - \vec{b} = (4; -6; 12)$. Теперь по формуле (1) находим: $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6$;

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 12^2} = 14.$$

Далее по формуле (4): $\cos \alpha = \frac{2 \cdot 4 + (-4) \cdot (-6) + 4 \cdot 12}{6 \cdot 14} = \frac{20}{21}$, тогда угол

между векторами $\alpha = \arccos \frac{20}{21}$. ♦

Пример 3. Найти координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a} = (1; -2)$, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$.

Решение: Находим $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, тогда $|\vec{b}| = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$; т.к. координаты кол-

линейных векторов пропорциональны, то $\frac{b_1}{1} = \frac{b_2}{-2} \Rightarrow b_2 = -2b_1$. Из

формулы (1) получим $(2\sqrt{5})^2 = b_1^2 + b_2^2 \Rightarrow 20 = 5b_1^2 \Rightarrow b_1 = 2$ и $b_2 = -2 \cdot 2 = -4$. Т.е. $\vec{b} = (2; -4)$. ♦

Задачи для самостоятельной работы

1. Дан прямоугольник ABCD, точка O – точка пересечения его диагоналей. Указать по рисунку все пары векторов: 1) равных; 2) противоположных; 3) одинаково направленных; 4) противоположно направленных; 5) коллинеарных.
2. В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке O. Найти сумму векторов $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$.
3. Даны длины векторов: $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 22$. Найти $|\vec{a} - \vec{b}|$.
4. Найти угол между векторами $\vec{a} = (4; 0; 3)$ и $\vec{b} = (2; -2; 1)$.
5. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 120° , $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$. Найти: 1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, 2) $(\vec{a} + \vec{b})^2$, 3) $(\vec{a} - \vec{b})^2$, 4) $(4\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b})$.
6. При каком m вектор $\vec{a} = (m; 7; -2)$ перпендикулярен вектору $\vec{b} = (-3; m; 2)$.
7. Дан ненулевой вектор $\vec{OA}$. Отложить из точки O: $3 \cdot \vec{OA}$; $-2 \cdot \vec{OA}$; $0,5 \cdot \vec{OA}$; $\sqrt{2} \cdot \vec{OA}$.
8. Вектора $\vec{AC} = \vec{m}$ и $\vec{BD} = \vec{n}$ служат диагоналями параллелограмма ABCD. Выразить вектора $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$ через $\vec{m}$ и $\vec{n}$.
9. В треугольнике ABC: A(-2; -1), B(2; 5), C(3; -2). Найти угол $\angle ACB$.
10. Когда скалярное произведение векторов равно нулю, меньше нуля, больше нуля?

§ 7. Элементы аналитической геометрии

Рассмотрим некоторую прямую l (рис.27). Возьмем на ней точку O и назовем ее началом координат. Справа от точки O возьмем точку E и назовем отрезок OE единичным отрезком. Примем направление движения от точки O до точки E за положительное направление. Тогда любой точке M на прямой l соответствует ее координата, т.е. такое число x , что:

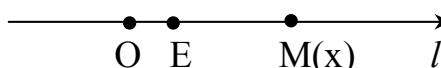


Рис.27

- 1) модуль числа x равен расстоянию от точки O до точки M : $|x|=|OM|$;
- 2) $x>0$, если точка M лежит справа от точки O и $x<0$, если точка M лежит слева от точки O .

Пример 7.1 точка A имеет координату 5, точка B имеет координату -3 . Изобразить эти точки на координатной прямой (рис.28).

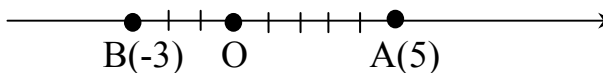
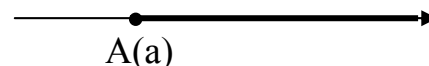


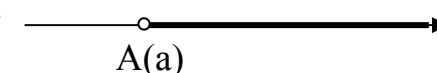
Рис.28

Выясним, как изображаются на прямой некоторые числовые множества (рис.29):

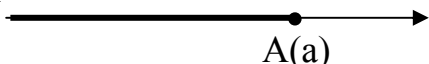
Опр 7.1: Множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x \geq a$, называется числовым лучом и обозначается $[a; +\infty)$.



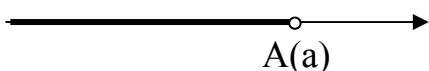
Опр 7.2: Множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x > a$, называется открытым числовым лучом и обозначается $(a; +\infty)$.



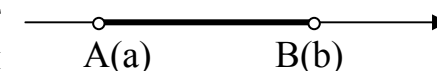
Опр 7.3: Множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x \leq a$, называется числовым лучом и обозначается $(-\infty; a]$



Опр 7.5: Множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x < a$, называется открытым числовым лучом и обозначается $(-\infty; a)$



Опр 7.6: Числовым промежутком называют множество чисел, которые удовлетворяют двойному неравенству $a < x < b$. Обозначается $(a; b)$.



Опр 7.6: Числовым отрезком называют множество чисел, которые удовлетворяют двойному неравенству $a \leq x \leq b$. Обозначается $[a; b]$.

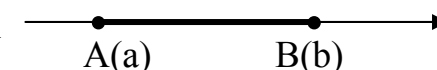


Рис.29

Пусть даны две точки $A(a)$ и $B(b)$ на координатной прямой. Расстояние между точками A и B обозначается $\rho(A, B)$ и вычисляется по формуле:

$$\rho(A, B) = |b - a|$$

Координата точки C – середины отрезка AB вычисляется по формуле:

$$x_c = \frac{a+b}{2}$$

Пример 7.2 Найти расстояние между точками $A(-6)$, $B(4)$, а также координату точки C – середины отрезка AB .

Решение: Расстояние между точками на прямой вычисляется по формуле $\rho(A,B) = |b-a| = |-4-6| = |-10| = 10$. Координата точки C вычисляется по формуле: $x_c = \frac{a+b}{2} = \frac{-6+4}{2} = -1$

Рассмотрим положение точки на плоскости. Для этого построим систему координат на плоскости (рис.30). Возьмем две перпендикулярные прямые x и y , которые пересекаются в точке O . Справа от точки O на прямой x возьмем точку E_1 и примем направление OE_1 за положительное, а расстояние между точками O и E_1 за 1. Аналогично возьмем точку E_2 на прямой y , причем $\rho(O,E_2) = \rho(O,E_1) = 1$. Направление OE_2 примем за положительное. Таким образом, каждая из пря-

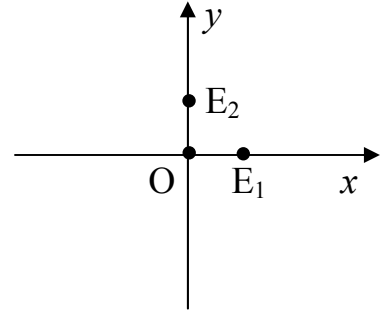


Рис.30

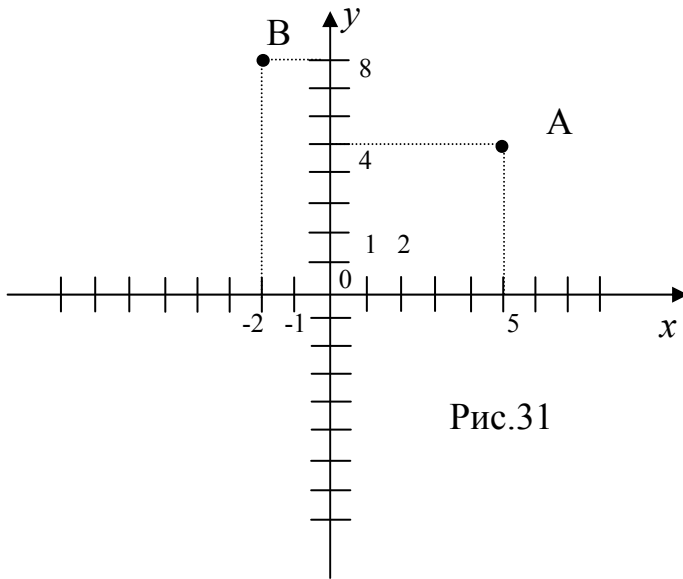


Рис.31

мых x и y станет координатной прямой с началом отсчета – точкой O . Прямую x называют осью абсцисс, а прямую y – осью ординат. Совокупность обеих осей называют декартовой прямоугольной системой координат, а плоскость, на которой задана прямоугольная декартова система координат называется координатной плоскостью. Положение

точки на плоскости задается двумя числами – абсциссой и ординатой. Например, точка A имеет координаты $A(5;4)$, т.е. абсцисса точки A равна 5, ордината равна 4. Точка B имеет координаты $B(-2;8)$ (рис.31).

Оси координат делят координатную плоскость на 4 части (рис.32), называемые четвертями. Знаки координат для точек каждой четверти представлены в таблице.

Четверть	Абсцисса (x)	Ордината (y)
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

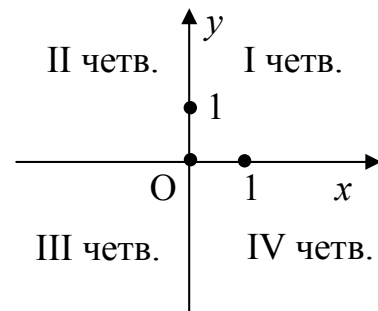


Рис.32

Пусть даны две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Расстояние между точками A и B вычисляется по формуле:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Координаты точки C – середины отрезка AB вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Пример 7.3 Найти расстояние между точками $A(3;6)$, $B(6;2)$, а также координаты точки C – середины отрезка AB .

Решение: Расстояние между точками на плоскости вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \rho(A, B) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \\ &= \sqrt{(6 - 3)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

Координаты точки C вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + 6}{2} = \frac{9}{2} = 4,5, \quad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{6 + 2}{2} = \frac{8}{2} = 4,$$

т.е. $C(4,5;4)$.

Рассмотрим уравнение линейное уравнение $y=kx+b$. Графиком этой функции будет прямая линия. Рассмотрим положение этой прямой:

- 1) Если $b=0$, т.е. уравнение принимает вид, то прямая проходит через начало координат (рис.33):

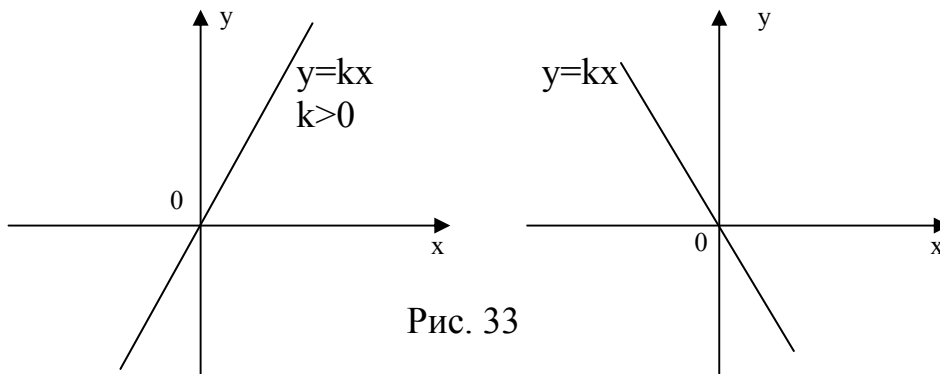


Рис. 33

- 2) Если $b \neq 0$, то прямая пересекает ось ординат в точке $(0; b)$ (рис. 34):

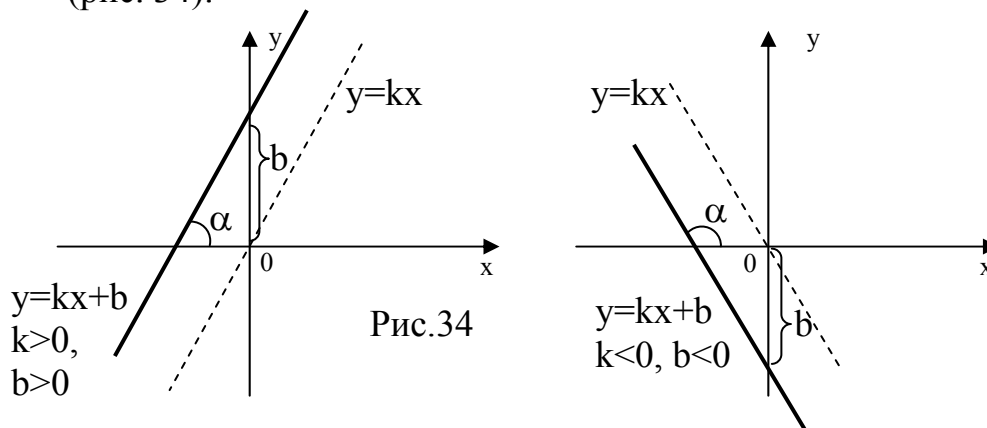


Рис.34

k называется угловым коэффициентом прямой и равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс, т.е. $k = \operatorname{tg} \alpha$;

b называется начальной ординатой прямой.

Для того чтобы две прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были равны, т.е. $k_1 = k_2$.

Для того чтобы две прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы произведение их угловых коэффициентов было равно -1, т.е. $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Пример 7.4 Напишите уравнение хотя бы одной прямой параллельной и одной прямой перпендикулярной данной $y=4x+2$.

Решение: угловой коэффициент данной прямой $k=4$. Все прямые параллельные данной будут иметь такой же угловой коэффициент $k = 4$, поэтому уравнение прямой, параллельной данной, $y=4x-10$. Все прямые перпендикулярные данной будут иметь угловой коэффициент $k = -1/4$, т.к. $k_1 \cdot k_2 = 4 \cdot (-1/4) = -1$, поэтому уравнение прямой, перпендикулярной данной, $y=-1/4x+10$.

Уравнение любой прямой, проходящей через точку $A(x_0; y_0)$ за исключением прямой, параллельной оси ординат, можно записать в виде:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Пример 7.5 Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(4; -7)$ параллельно прямой $y=2x-3$.

Решение: Так как искомая прямая проходит через точку $A(4; -7)$, ее уравнение должно иметь вид $y - (-7) = k(x - 4)$, т.е. $y + 7 = k(x - 4)$. Но так как она параллельна прямой $y=2x-3$, а у параллельных прямых угловые коэффициенты равны, то $k=2$, и поэтому искомое уравнение имеет вид $y + 7 = 2(x - 4)$, откуда $y + 7 = 2x - 8$, или $y = 2x - 15$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ за исключением прямой, параллельной оси ординат, можно записать в виде:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Пример 7.6 Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(5; 2)$ и $B(-1; 4)$.

Решение: Уравнение прямой, проходящей через две точки имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

$$\text{лучим: } \frac{x - 5}{-1 - 5} = \frac{y - 2}{4 - 2}, \quad \frac{x - 5}{-6} = \frac{y - 2}{2}, \quad y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 5), \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}.$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ за исключением прямой, параллельной оси ординат, можно записать в виде:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Пример 7.7 Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $A(4;-8)$ и $B(7;-5)$.

Решение: По формуле $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ получаем, что

$$k = \frac{-5 - (-8)}{7 - 4} = \frac{-5 + 8}{7 - 4} = \frac{3}{3} = 1$$

Тангенс угла между прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ выражается формулой: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$ (рис. 35).

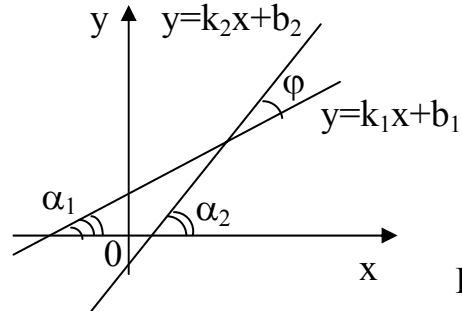


Рис.35

Пример 7.8 Найти угол между прямыми линиями $y=3x-1$ и $y=-2x+4$.

Решение: В этом случае $k_1=3$, $k_2=-2$ поэтому $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-2 - 3}{1 + (-2) \cdot 3} = \frac{-5}{-5} = 1$

Но если тангенс угла φ равен 1, то угол равен 45° . Значит прямые образуют угол 45° .

Задания для самостоятельной работы

1. Отметьте на координатной прямой следующие точки $A(-4)$, $B(0)$, $C(15)$ и найдите расстояние от них до точки $E(8)$.
2. Дана трапеция $ABCD$: $A(1;3)$, $B(-2;8)$, $C(0;7)$, $D(5;1)$. Найдите длину ее средней линии.
3. Даны 3 вершины параллелограмма $ABCD$: $A(-4;-2)$, $B(-1;1)$, $C(5;1)$. Найдите координаты точки D – четвертой вершины параллелограмма и координаты точки O – точки пересечения диагоналей, а также периметр параллелограмма.
4. Постройте прямую имеющую угловой коэффициент $k=2$, и начальную ординату $b=-3$.
5. Даны точки $A(3;6)$ и $B(6;2)$. Найдите уравнение прямой CD , проходящей через точку C – середину отрезка AB и перпендикулярной отрезку AB .
6. Даны точки $A(3;6)$ и $B(6;2)$. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $C(-7;6)$, параллельно данной прямой.
7. Дан ромб $ABCD$: $A(-1;1)$, $B(3;4)$, $C(7;-1)$. Найти координаты точки D и уравнения диагоналей.
8. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;5)$ перпендикулярно прямой $y = \frac{1}{3}x + 6$.
9. Найдите углы треугольника ABC с вершинами $A(-3;1)$, $B(-1;7)$, $C(2;1)$.

§ 8. Основы математического анализа.

п.1 Функции и последовательности.

Рассмотрим задачу: “У Маши 10 конфет. Она отдала Вите 6 конфет, сколько конфет осталось у Маши?” Ответ: “У Маши осталось 4 конфеты”. Но если изменить количество отданных Машей конфет на 7, то изменится и ответ: у Маши останется 3 конфеты. Т.о., если обозначить количество отданных Машей конфет x , а количество оставшихся у Маши конфет y , то получим равенство $x+y=10$. Из этого равенства получим, $y=10-x$. Т.о., это равенство позволяет для каждого значения x найти свое значение y . Но количество конфет не может выражаться ни отрицательным, ни дробным числом – это натуральное число. Поэтому x может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Соответствие между x и y задается таблицей:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Эта таблица определяет отображение числового множества $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ в множество $\mathbf{R}$ действительных чисел, или как говорят, числовую функцию с областью определения X .

Опр 8.1.1: Говорят, что на множестве $X \subset \mathbf{R}$ ($\subset$ – этот знак означает, что множество X содержится в множестве $\mathbf{R}$) задана числовая функция, если каждому числу x из этого множества поставлено в соответствие некоторое число y .

Функцию обозначают буквой f и пишут $y=f(x)$, $x \in X$. Множество X называют областью определения этой функции. x называют аргументом функции $y=f(x)$. Значение функции, соответствующее значению a аргумента x , обозначают $f(a)$. Множество $Y=\{f(x) | x \in X\}$ называют множеством значений функции.

Опр 8.1.2: графиком функции $y=f(x)$ называют множество пар $(x;y)$ таких, что $x \in X$, а $y=f(x)$, т.е. пар вида $(x;f(x))$, $x \in X$. Каждой паре соответствует точка на координатной плоскости, имеющая координаты $(x;f(x))$.

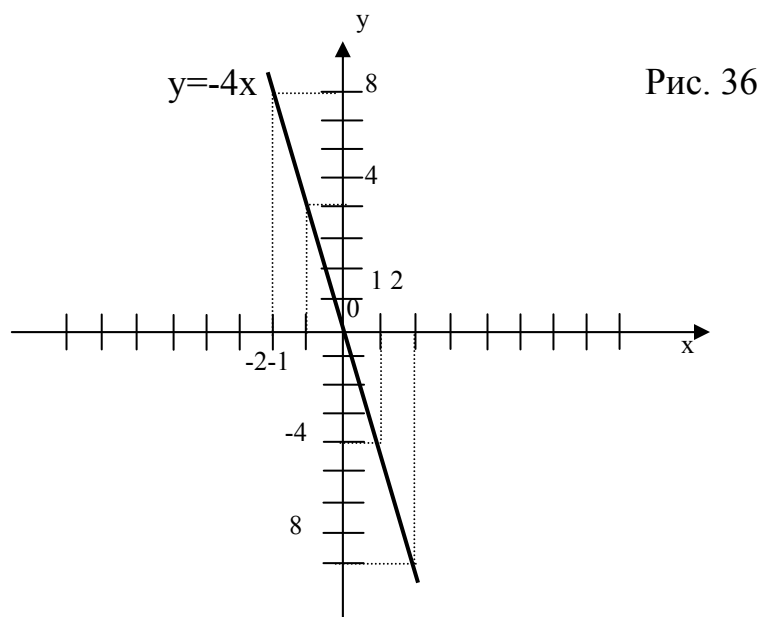
Пример 8.1.1: Найдите множество значений функции $y=-4x$ для $x \in X=\{-2,-1,0,1,2\}$. Постройте график данной функции для $x \in \mathbf{R}$.

Решение: Так как множество X конечно, то множество значений функции $y=-4x$, можно найти, подставляя по очереди значения x . Получаем:

$$\begin{array}{llll} x = -2 & y = (-4) \cdot (-2) = 8 & x = -1 & y = (-4) \cdot (-1) = 4 \\ x = 0 & y = (-4) \cdot 0 = 0 & x = 1 & y = (-4) \cdot 1 = -4 \\ x = 2 & y = (-4) \cdot 2 = -8 & & \end{array}$$

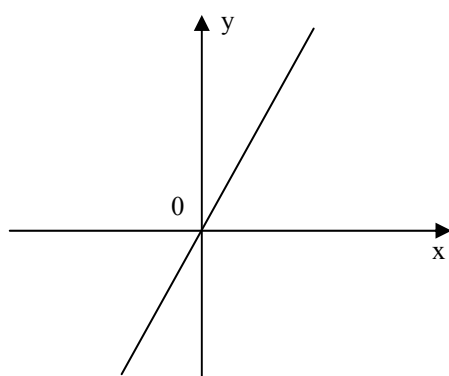
Таким образом: $Y=\{-8,-4,0,4,8\}$

График функции для $x \in \mathbf{R}$ имеет вид (Рис. 36):

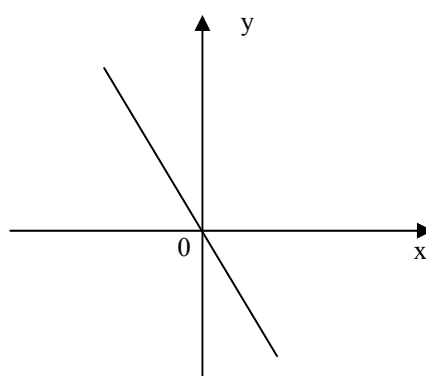


Примеры функций:

1. Прямая пропорциональность $y=kx$; k – коэффициент пропорциональности; график прямой пропорциональности – прямая линия. Схематически график прямой пропорциональности можно изобразить так (рис. 37):



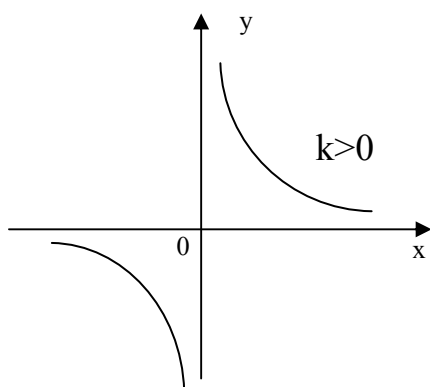
$k > 0$



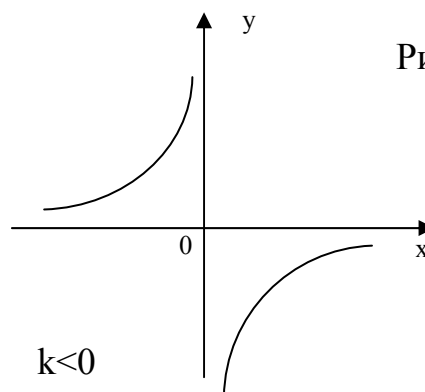
$k < 0$

Рис. 37

2. Обратная пропорциональность $y=k/x$; k – коэффициент пропорциональности; график – гипербола. Схематически график обратной пропорциональности можно изобразить так (рис. 38):



$k > 0$



$k < 0$

Рис. 38

3. Квадратичная функция $y=kx^2$; график – парабола. Схематически график квадратичной функции можно изобразить так (рис. 39):

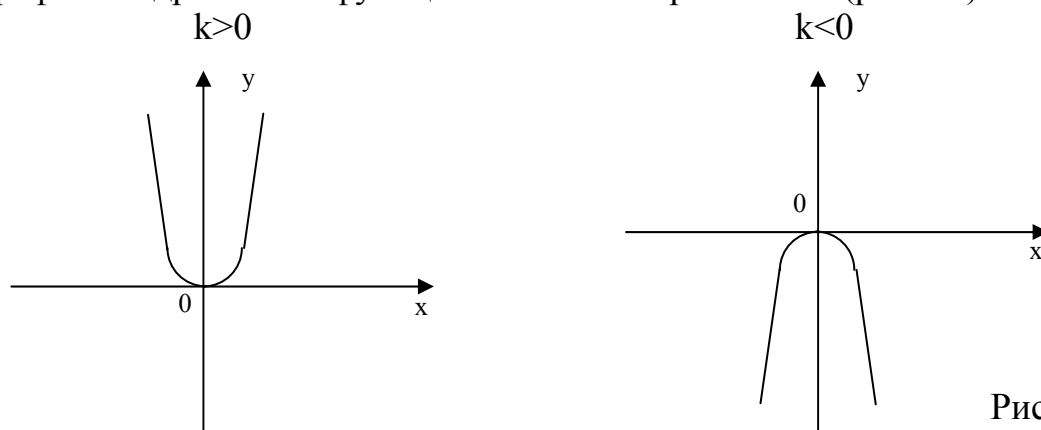


Рис. 39

Рассмотрим другую задачу: будем ежедневно записывать температуру воздуха в 12 часов дня. Получатся некоторые числа, идущие в определенном порядке, например

2.6, 2.5, 2.6, 2.4, 2.6, 1.9, ...

Т.о. мы получили функцию, заданную на множестве N натуральных чисел – дней и принимающую числовые значения в множестве R действительных чисел – температур.

Опр 8.1.3: Числовой последовательностью называют функцию $y=f(n)$, заданную на множестве N натуральных чисел и принимающую числовые значения. Числовую последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ обозначают (a_n) .

Примеры числовых последовательностей:

- 1) последовательность всех четных натуральных чисел 2, 4, 6, 8, ...;
- 2) последовательность всех простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

Пример 8.1.2. Запишите первые 5 членов последовательности: $a_n = (-1)^n / 2^n$.

Решение: $n=1, a_1 = -1/2$; $n=2, a_2 = 1/4$; $n=3, a_3 = -1/8$;
 $n=4, a_4 = 1/16$; $n=5, a_5 = -1/32$.

Пример 8.1.3. Найдите одну из формул общего члена последовательности, зная несколько первых членов:

а) 3, 9, 27, 81, 243, ...

б) $1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32$

Решение: а) $a_n = 3^n$ б) $a_n = 1/2^n$.

Не всегда последовательности задают, указав выражение ее общего члена. Иногда вместо этого указывается правило, позволяющее по первым n членам последовательности находить следующий за ним $n+1$ член этой последовательности. Такие последовательности называются рекуррентными или возвратными.

Пример 8.1.4. Напишите первые пять членов последовательности, заданной рекуррентно $a_{n+1} = na_n$, если $a_1 = 1$.

Решение: $a_1=1, n=1, a_2=2, n=2, a_3=6, n=3, a_4=24, n=4, a_5=120$.

Простейшими примерами рекуррентных последовательностей являются арифметическая прогрессия (формула общего члена: $a_n=a_1+(n-1)d$) и геометрическая прогрессия (формула общего члена: $a_n=a_1q^{n-1}$). Более сложный пример рекуррентной последовательности является последовательность чисел Фибоначчи (итальянский математик начала XIII в., рассмотревший задачу, в которой встречались эти числа): $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

n.2 Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.

Последовательность натуральных чисел $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ монотонно возрастает, т.е. ее члены становятся все больше и больше. Если, например, задать число 10, то начиная с номера 11 все члены данной последовательности станут больше этого числа. Вообще, какое бы число M мы не взяли, найдется такой номер, начиная с которого все члены нашей последовательности окажутся больше M . Последовательности, обладающие таким свойством называются стремящимися к $+\infty$.

Опр 8.2.1 Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ стремится к $+\infty$, если для любого $M>0$ найдется номер N , начиная с которого все члены последовательности удовлетворяют неравенству $a_n>M$.

Например, последовательность квадратов натуральных чисел $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ также является стремящейся к $+\infty$.

Если поменять знаки у всех членов последовательности, стремящейся к $+\infty$, получится последовательность, которая стремится к $-\infty$. Например: $-1, -4, -9, -16, -25, \dots$

Если последовательность стремится к $+\infty$, то пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, а если она стремится к $-\infty$, то пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Опр 8.2.2 Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называется бесконечно большой тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$

Таким образом, согласно определению, последовательности а) $-1, -4, -9, -16, -25, \dots$ б) $1, 3, 9, 27, 81, 243, \dots$ являются бесконечно большими, так как предел модулей их общих членов равен $+\infty$.

Мы знаем, что чем больше знаменатель положительной дроби, тем меньше значение этой дроби: $\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{100} > \dots > \frac{1}{1000} > \dots$ Таким образом, если знаменатель дроби стремиться к $+\infty$, то сама дробь стремиться к 0, или, что тоже самое, если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, то последовательность $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ бесконечно мала.

Опр 8.2.3 Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называется бесконечно малой, если для любого положительного малого числа ε най-

дётся номер N , начиная с которого выполняется неравенство $\left(\frac{1}{a_n}\right) < \varepsilon$.

Теорема 8.2.1. Если последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ бесконечно велика, то последовательность $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$ бесконечно мала.

Обратно, если $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ бесконечно мала, то $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$ бесконечно велика.

п.3 Предел последовательности

Опр 8.3.1 последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ имеет предел a , если последовательность с общим членом $a_n = a_n - a$ бесконечно мала.

Пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Свойства пределов:

- 1) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- 2) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$
- 2) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, причем $b \neq 0$ и все $b_n \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = a / b$

Пример 8.3.1: Вычислить предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{4n^2 + 6n + 7}$

Решение: разделим числитель и знаменатель дроби на n^2 и применим свойства предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{4n^2 + 6n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{6}{n} + \frac{7}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{6}{n} + \frac{7}{n^2}\right)} = \frac{3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^2}} = \frac{3}{4}.$$

Вообще, если общий член последовательности является дробью, в числителе которой стоят многочлены от n , имеющие одну и ту же степень, то предел этой последовательности равен отношению коэффициентов при старших членах:

Пример 8.3.2 Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 6n + 1}{8n^3 + 5n^2 + 9}$

Решение: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 6n + 1}{8n^3 + 5n^2 + 9} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

п4. Предел функции

Опр 8.4.1: Промежуток $(a-\delta; a+\delta)$ с центром в точке a называется окрестностью точки a радиуса δ (рис. 40).

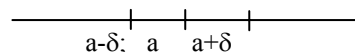


Рис. 40

Функция $y=(x-1)^2$ обращается в нуль при $x=1$. Если взять значения аргумента близкие к числу 1, им будут соответствовать сколь угодно малые значения функции. Например, $|x-1|<0,1$, то $|x-1|^2<0,01$, т.е. на интервале $(0,9; 1,1)$ выполняется неравенство $|x-1|^2<0,01$. Аналогично можно доказать, что на интервале $(0,99; 1,01)$ выполняется неравенство $|x-1|^2<0,0001$. Таким образом, для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ ($\varepsilon = 0,01, 0,0001, \dots$) найдется окрестность точки $x=1$, в которой выполняется неравенство $(x-1)^2<\varepsilon$. Говорят, что функция $y=(x-1)^2$ бесконечно мала, если $x\rightarrow 1$.

Опр 8.4.2 Функция называется бесконечно малой при $x\rightarrow a$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать окрестность точки a , во всех точках которой выполняется неравенство $|f(x)|<\varepsilon$

Пример 8.4.1 Функция $y=\sqrt[3]{x-a}$ бесконечно мала при $x\rightarrow a$. В самом деле, неравенство $|\sqrt[3]{x-a}|<\varepsilon$ имеет место, если $|x-a|<\varepsilon^3$, т.е. $a-\varepsilon^3<x<a+\varepsilon^3$.

Рассмотрим пример: функция $y=x^2+1$ не является бесконечно малой при $x\rightarrow 3$ (например, если $x=3,01$, то $y=10,0601$). Но эту функцию можно записать так: $y=10+(x^2-9)$, Здесь слагаемое (x^2-9) является бесконечно малым при $x\rightarrow 3$. Поэтому когда x мало отличается от 3, значение заданной функции мало отличается от 10. Говорят, что предел этой функции при $x\rightarrow 3$ равен 10, и пишут, $\lim_{x\rightarrow 3}(x^2+1)=10$

Опр 8.4.3 Если функцию $y=f(x)$ можно представить в виде суммы числа b и функции $y=\alpha(x)$, бесконечно малой при $x\rightarrow a$, т.е. в виде $y=b+\alpha(x)$, то число b называют *пределом* этой функции при $x\rightarrow a$ и пишут $\lim_{x\rightarrow a} f(x)=b$

Свойства пределов функций:

- 1) Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют пределы при $x\rightarrow a$, то их сумма и произведение имеют пределы при $x\rightarrow a$, причем: предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{x\rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\rightarrow a} f(x) + \lim_{x\rightarrow a} g(x)$$

предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x\rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x\rightarrow a} g(x)$$

- 2) Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют пределы при $x\rightarrow a$, причем второй предел отличен от нуля, то

$$\lim_{x\rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\rightarrow a} f(x)}{\lim_{x\rightarrow a} g(x)}$$

Пример 8.4.2. вычислить предел: $\lim_{x\rightarrow 5} \frac{x^2+10}{2x^2-1}$

Решение: Очевидно, что $\lim_{x \rightarrow 5} x = 5$. Поэтому по сформулированным выше утверждениям имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 10}{2x^2 - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + 10)}{\lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 1)} = \frac{(\lim_{x \rightarrow 5} x)^2 + 10}{2 \cdot (\lim_{x \rightarrow 5} x)^2 - 1} = \frac{5^2 + 10}{2 \cdot 5^2 - 1} = \frac{35}{49} = \frac{5}{7}$$

Опр 8.4.4 если в точке a знаменатель дробно-рациональной функции обращается в нуль, а ее числитель отличен от нуля, то по мере приближения x к a значения функции становятся сколь угодно большими по модулю. Говорят, что функция бесконечно велика, когда x стремится к a , и пишут $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Пример 8.4.3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 7}{x^2 - 4}$

Решение: Так как при $x \rightarrow 2$ знаменатель дроби $x^2 - 4$ обращается в нуль, а числитель дроби $x^2 + 7$ отличен от нуля, то $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 7}{x^2 - 4} = \infty$

Если же при $x=a$ в нуль обращается и числитель и знаменатель, то надо сделать тождественные преобразования, сократив числитель и знаменатель на $x-a$.

Пример 8.4.4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 7x + 12}$

Решение: При $x=3$ числитель и знаменатель данной дроби обращаются в нуль, поэтому для взятия этого предела необходимо выполнить некоторые преобразования. Разложим числитель и знаменатель данной дроби на множители. Числитель представляет собой разность квадратов, т.е. $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. Знаменатель можно представить как квадратное уравнение: $x^2 - 7x + 12 = 0$.

$$D = b^2 - 4ac = 49 - 48 = 1, x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + 1}{2} = 4, x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 - 1}{2} = 3.$$

Таким образом $x^2 - 7x + 12 = a(x - x_1)(x - x_2) = (x-3)(x-4)$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 7x + 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot (x+3)}{(x-3) \cdot (x-4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-4} = \frac{3+3}{3-4} = -6$$

п. 5. Приращение, дифференциал и производная функции

Объем куба является функцией от его стороны, $V = x^3$. Если куб сделан из металла, то при нагревании длина стороны куба увеличивается, а значит увеличивается и объем куба. Если длина стороны была x и увеличилась на h , то она примет значение $x+h$ и объем куба станет равен $(x+h)^3$. Значит при нагревании объем куба увеличился на $(x+h)^3 - x^3$. Эту разность называют приращением объема куба, а число h – приращением длины ребра. В математике приращение какой-нибудь

величины обозначают Δx . Т.о., если $y=f(x)$ некоторая функция и x получил приращение Δx , то меняется и значение функции, в результате чего она получает некоторое приращение Δy , которое вычисляется по формуле $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Пример 8.5.1. Вычислить приращение функции $y=x^3$

Решение: Приращение функции $y=x^3$ имеет вид:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 = 3x^2\Delta x + (3x\Delta x + \Delta x^2)\Delta x$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ второе слагаемое стремится к 0 быстрее, поэтому главной частью приращения функции является первое слагаемое. Оно называется дифференциалом функции и обозначается dy , т.е. $dy=3x^2\Delta x$. Приращение аргумента называют в этом случае дифференциалом аргумента и обозначают dx . Значит, $dy=3x^2dx$.

Если записать приращение функции в общем виде, то получим:

$$\Delta y = \underbrace{3x^2\Delta x}_{A(x)} + \underbrace{(3x\Delta x + \Delta x^2)\Delta x}_{\alpha}, \text{ т.е. } \Delta y = A(x)\Delta x + \alpha\Delta x$$

Разделив обе части равенства $\Delta y=A(x)\Delta x+\alpha\Delta x$ на Δx получим: $\Delta y/\Delta x=A(x)+\alpha$. Но предел при $\Delta x \rightarrow 0$ бесконечно малой α равен 0, поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A(x)$$

В этом равенстве предел приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю называется производной функции $y=f(x)$ при заданном значении x . Его обозначают $f'(x)$.

Пример 8.5.2 Найти дифференциал и производную функции $y=x^2$.

Решение:

1) приращение этой функции имеет вид:

$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2$. Слагаемым, пропорциональным Δx является первое слагаемое, значит $\Delta y=2x\Delta x$. Таким образом, дифференциал заданной функции $dy=2xdx$.

2) Для нахождения производной разделим обе части полученного равенства $\Delta y=2x\Delta x$ на Δx , получим $\Delta y/\Delta x=2x+\Delta x$. Найдем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x,$$

следовательно, $f'(x)=2x$

Геометрический смысл производной: производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной в точке с абсциссой x_0 к графику функции $y=f(x)$, т.е. $f'(x)=k$ (рис. 41)

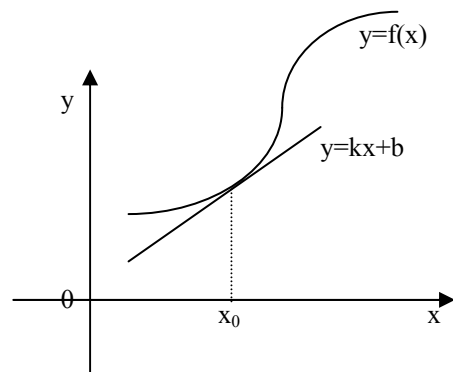


Рис. 41

Механический смысл производной: мгновенная скорость точки в момент времени t равна значению в этот момент производной от перемещения, т.е. от функции $x=f(t)$.

п.6 Формулы дифференцирования

1. Производная постоянной равна 0 $C'=0$
2. Производная функции $y=x$ равна единице $x'=1$.
3. Производная суммы двух функций равна сумме производных $u'+v'=(u+v)'$
4. Производная произведения двух функций вычисляется по формуле: $(uv)'=u'v+uv'$
5. Производная частного двух функций вычисляется по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
6. Постоянный множитель можно вынести за знак производной: $(Cu)'=Cu'$
7. Для любого натурального значения n имеет место равенство: $(x^n)'=nx^{n-1}$

Пример 8.6.1. Вычислить производную функции $y=8x^5+6\sqrt{x}$

$$\begin{aligned} y' &= (8x^5 + 6\sqrt{x})' = (8x^5)' + (6\sqrt{x})' = 8(x^5)' + 6\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \\ &= 8 \cdot 5x^4 + 6 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 40x^4 + \frac{3}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Пример 8.6.2. Вычислить производную функции $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2-1)' \cdot (x^2+1) - (x^2-1) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{2x(x^2+1-x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x \cdot 2}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

п.7 Неопределенный интеграл

Наряду с задачами, в которых по заданной функции надо найти ее производную, встречаются задачи, в которых по заданной производной надо найти функцию, которую дифференцировали. Эту функцию называют первообразной для заданной. Т.о., функция $y=F(x)$ является первообразной для функции $y=f(x)$ в том и только том случае, когда $F'(x)=f(x)$.

Пример 8.7.1. функция $y=x^3$ является первообразной для функции $y=3x^2$, так как $(x^3)'=3x^2$. Кроме этой функции, любая функция вида

$y=x^3+C$, где C – произвольная постоянная, является первообразной для $y=3x^2$, т.к. $(x^3 + C)'=3x^2$.

Т.о., функция имеет множество первообразных. Совокупность всех первообразных для функции $y=f(x)$ называют неопределенным интегралом этой функции и обозначают $\int f(x)dx$

Т.о., $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Свойства неопределенного интеграла:

1. Неопределенный интеграл от суммы двух функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$$

Пример 8.7.2. Вычислить интеграл $\int (x^5 - 4x^2 + 8)dx$

Решение:

$$\int (x^5 - 4x^2 + 8)dx = \int x^5 dx + \int (-4x^2)dx + \int 8dx =$$

$$\int x^5 dx - 4 \int x^2 dx + 8 \int dx = \frac{x^6}{6} - 4 \frac{x^3}{3} + 8x + C$$

Основные формулы:

$$\int dx = x + C \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n+1) \int x^n dx = x^{n+1} + C$$

п.8 Определенный интеграл

Из-за того, что в выражение неопределенного интеграла входит произвольная постоянная C , нельзя найти значение этого интеграла при заданном значении x . Тем не менее можно найти разность значений интеграла в данных точках b и a . В самом деле, каково бы ни было C , имеем:

$$[F(b)+C]-[F(a)+C]=F(b)-F(a).$$

Это равенство показывает, что для всех первообразных функции $y=f(x)$ разность их значений в точках b и a одна и та же, она не зависит от C . Поэтому разность значений первообразной для функции $y=f(x)$ в точках b и a называют определенным интегралом от этой функции по отрезку $[a;b]$. Определенный интеграл по отрезку $[a;b]$ обозначают:

$$\int_a^b f(x)dx. \quad \text{Т.о.,} \quad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad \text{где } F(x) - \text{первообразная}$$

для $f(x)$. Разность $F(b)-F(a)$ обозначается $F(x)\Big|_a^b$

Свойства определенных интегралов:

$$1. \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$2. \int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$3. \text{Если } a < c < b, \text{ то } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$4. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Пример 8.8.1. Вычислить определенный интеграл $\int_2^5 x^2 dx$

Решение: $\int_2^5 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = 39$

Задачи для самостоятельной работы

1. Маша нашла 6 грибов, а Коля на x грибов больше. Чему равно число y грибов, которые они собрали вместе? Запишите соответствие между x и y и найдите область определения полученной функции и область значений. Изобразите график.

2. Постройте график и найдите множество значений функции $y = \frac{5}{x-3}$, $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

3. Запишите первые пять членов последовательности: $a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$

4. Найдите одну из формул общего члена последовательности, зная несколько первых членов: а) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ б) 2, 5, 10, 17, 26, ...

5. Последовательность задана рекуррентным соотношением $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. Напишите ее первые шесть членов, если $a_1=1$, $a_2=3$.

6. Вычислите пределы следующих последовательностей:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 1}{5n^2 + n + 8}$, б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 9}{n^4 + 16}$, в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{3n + 8}$

7. Вычислите пределы следующих функций:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x^2 + 16}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$, в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 6x + 8}$

8. Найдите приращение функции $y = x^2 - 4x + 3$, если $x=1$, $\Delta x=0,1$.

9. Найдите дифференциалы и производные (используя определение) следующих функций: а) $y = 4x^2 + 6x - 1$, б) $y = x^3 - x^2$.

10. Напишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $y=x^2$ в точке с абсциссой 5.

11. Найдите производные следующих функций:

а) $y=6\sqrt{x}-\frac{7}{x^4}$, б) $y=\frac{2x^5-6x^3+4}{3x^4}$, в) $y=\sqrt[6]{x}(4x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})$

12. Вычислите следующие неопределенные интегралы:

а) $\int (3x^5 - 6x^4 + 2x - 7)dx$, б) $\int \frac{dx}{x^6}$, в) $\int \frac{x^3 + 4\sqrt{x} + 5}{x^2} dx$.

13. Вычислите следующие определенные интегралы:

а) $\int_3^5 (x^3 - 4x + 3)dx$, б) $\int_1^9 x^2 \sqrt{x} dx$, в) $\int_1^4 \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x}} dx$.

§ 9. Информация и информационные процессы

п.1. Понятие об информации. Носители информации.

Количественная мера информации. Кодирование информации

Понятие “информация” является одним из основных фундаментальных понятий в современной науке и не может быть строго определено через другие более общие или более простые понятия.

Термин «информация» происходит от латинского слова *informatio*, означающего разъяснение, изложение.

В житейском плане мы обычно понимаем под информацией сообщение о состоянии и свойствах объектов, явлений, процессов.

Вся жизнь и деятельность каждого человека и общества в целом тесно связана с процессами восприятия, хранения, переработки и использования информации. С самого раннего детства мы вовлечены в процессы обмена информацией. Вопросы, ответы, улыбки – все это передача информации. Мы получаем информацию, когда читаем газеты, книги, журналы, слушаем товарищей, учителя, родителей и т.д.

Информация имеет форму: форму рассказа, книги, рисунка, музыкального произведения, кино, разговора и др.

Свойства информации:

1. *Достоверность* – если она отражает истинное положение дел. К чему может привести недостоверная информация? К неправильному пониманию или неправильному принятию решений (например, на бирже).

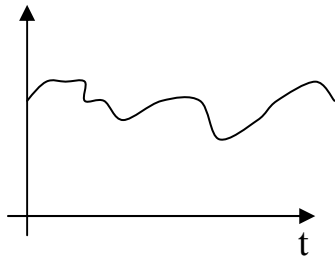
2. *Полнота* – если ее достаточно для понимания и принятия решений. Неполнота информации может сдерживать принятие решений или повлечь ошибки.

3. *Ценность и актуальность* – если информация полезна для принятия решений и поступила вовремя.

4. *Ясность* – когда информация выражена понятным языком, для тех, кому предназначена эта информация.

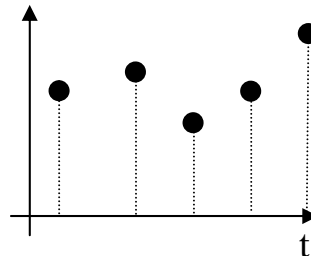
Опр 9.1.1 Информатика – это научная дисциплина, изучающая законы и методы накопления, обработки, хранения и передачи информации с помощью электронно-вычислительных машин (ЭВМ).

Хранить информацию можно в двух формах: непрерывной (или аналоговой) и дискретной (рис. 42).



Аналоговая форма
представления информации
(музыка на магнитной ленте)

Рис. 42



Дискретная форма
представления информации
(таблица замеров температур)

Первобытные люди, также как и мы с вами, были вовлечены в процессы передачи и переработки информации. Они общались жестами и мимикой, рассказывая друг другу о приближающейся опасности, о поисках пищи и жилья и т.д. Постепенно появилась речь, и обмен информацией стал более живой и ясный. С возникновением письменности информация стала передаваться не только устно или жестами. Умение читать и писать стало признаком грамотности людей. Выражение мыслей в письменной форме открыло возможность накапливать человеческие знания в форме рукописей и рукописных книг, т.е. передавать сокровища человеческой мысли от одного поколения к другому. Изобретение печатных станков в 15 веке открыло возможность издания книг и широкого распространения шедевров человеческой мысли. Изобретение в 19-начале 20 веков телеграфа, телефона, радио и телевидения открыло перед людьми возможность передачи информации на любые расстояния с огромной скоростью. Совершенно новые возможности для поиска и обработки информации открыло перед людьми изобретение в середине 20 века ЭВМ.

Передача информации: жесты, мимика, речь, наскальные рисунки, книги, телеграф, телефон, радио, телевидение, ЭВМ.

Обработка или преобразование информации: фотообработка (сжатие снимаемого на пленку изображения во времени.), телефонная обработка информации, математическая формула (например, нахождение корня из числа. Здесь исходная информация число, результат – корень из этого числа, а вычисление корня – процесс обработки исходной информации до получения результата). Обработкой информации занимается мозг человека, различные технические устройства: микрокалькулятор, игровые автоматы, ЭВМ и др.

Конечно, мозг человека уступает возможностям технических устройств по восприятию и переработке информации. Например, в физике, в процессе эксперимента, который длится некоторое продолжительное вре-

мя, происходит весьма быстрое изменение сразу многих параметров: температуры, напряжения, частоты колебаний, скорости течения химической реакции и т.д. Для того чтобы уследить за всеми изменениями, потребуется не одна, а несколько пар глаз. Кроме того, эти изменения могут происходить с большой скоростью, так что человек просто не в силах бывает уследить за ними. Если же вся система всевозможных датчиков присоединена к ЭВМ, то она четко фиксирует ход процесса в удобной для человека форме (например, в виде таблиц).

Преобразуя информацию, человеческий мозг и технические устройства ее кодируют. Теория кодирования и древнейшее искусство тайнописи – искусство криптографии – близки друг к другу. Над разработкой различных шрифтов трудились многие ученые: философ Ф.Бэкон, математики Д.Кордано, Д.Валлис. Естественно, что с развитием методов шифровки развивались приемы расшифровки, или криптоанализа. Например, французский математик Ф.Виет (1540-1603) нашел ключ к шифру, которым пользовались испанцы во время войны с французами, и даже сумел проследить за всеми его изменениями. В середине 19 века ситуация изменилась. Появились телефон и искровой телеграф, что поставило перед учеными и инженерами проблему создания теории связи, и, главное, в первую очередь новой теории кодирования.

Первой ориентированной на технику системой кодирования оказалась азбука Морзе, где использовалось **двоичное кодирование**: точка, тире (короткие и длинные импульсы).

В современной вычислительной технике информация кодируется с помощью сигналов двух видов: высокое или низкое напряжение (двоичное кодирование). Принято обозначать одно состояние цифрой 0 (низкое напряжение), а другое – цифрой 1 (высокое напряжение). Эти цифры 0 и 1 называются **битами** (от англ. bit – binary digit – двоичная цифра).

При двоичном кодировании текстовой информации каждому символу сопоставляется его **код** – последовательность из фиксированного количества нулей и единиц. Каждому символу соответствует последовательность из 8 нулей и единиц, называемая **байтом** (англ. byte). Всего существует $\bar{A}_2^8 = 2^8 = 256$ разных последовательностей из 8 нулей и единиц (от $(00000000)_2$ до $(11111111)_2$) – это позволяет закодировать 256 различных символов (например, большие и малые буквы русского и латинского алфавитов, цифры, знаки препинания и т.д.)

В настоящее время используются 2 международные системы кодирования символьной информации (алфавит английский):

- 1) EBCDIC (расширенный двоично кодированный десятичный код);
- 2) ASCII (американский стандартный код для обмена информацией).

Для латинского и русского алфавитов используется отечественный аналог данных кодов:

- 1) ДКОИ-8 (Двоичный код обмена информации);
- 2) КОИ-8 (код обмена информацией).

Буква латинская	ДКОИ-8	КОИ-8
А	11000001	01000001

Коды различных букв различны

Пример: закодировать “МИРУ МИР”

Буква	код	буква	код
М	11101101	И	11101001
Р	11110010	У	11110101
Пробел (пустой промежуток)	00100000		

Получим последовательность из 64 нулей и единиц:

1110110111101001111100101111010100100000111011011110100111110010

Т.е., чтобы закодировать эту фразу понадобится 64 бита или 8 байт памяти.

Более крупные единицы информации:

1 **Кбайт** (1 килобайт) = 2^{10} байт = 1024 байт $\approx$ 1000 байт = 10^3 байт

1 **Мбайт** (1 мегабайт) = 2^{20} байт = 1024² байт = 1048576 байт $\approx$ 1000000 байт = 10^6 байт

1 **Гбайт** (1 гигабайт) = 2^{30} байт = 1024³ байт $\approx$ 1000000000 байт = 10^9 байт

В КОИ-8 каждая буква, знак препинания, пробел – это 1 байт. На страницу учебника помещается 48 строк, в каждой строке – примерно 60 знаков (60 байт). Таким образом, полностью заполненная страница нашего учебника имеет информационный объем $48 \cdot 60 = 2880$ байт $\approx$ 2,9 Кбайта. А если в книге 250 страниц, то примерно $250 \cdot 2,9 = 725$ Кбайт $\approx$ 0,7 Мбайт. В БОЛЬШОЙ СОВЕТСКОЙ ЭНЦИКЛОПЕДИИ примерно 120 Мбайт информации. Один цветной кадр телевизора содержит около 1 мегабайта информации, а 1,5 часовой цветной фильм (при частоте 25 кадров в секунду) – 135 гигабайт.

п.2. Понятие о системах счисления. Системы счисления, применяемые в цифровых ЭВМ

Под системой счисления понимается способ записи чисел с помощью определенного набора знаков (цифр). Системы счисления подразделяются на *позиционные* и *непозиционные*. Например, Арабская система счисления является позиционной, а Римская система счисления – непозиционной.

В позиционной системе счисления значение каждой цифры, входящей в запись числа, зависит от ее положения (позиции) в ряду цифр, изображающих это число. Например, в числе 777 первая слева семерка означает количество сотен, содержащихся в числе, вторая – количество десятков, третья – количество единиц.

В Римской системе счисления значение цифры не зависит от ее положения в записи числа. Пример, число XXX. Здесь цифра X в любом месте означает число десять (а вся запись – число $10+10+10+30$).

Непозиционные системы счисления неудобны для вычислений, поэтому в вычислительной технике используются только позиционные системы счисления.

Пусть p - некоторое целое число, большее 1, которое будем называть *основанием* системы счисления. Принимая за основание системы счисления различные числа (десять, восемь, пять, два и др.), получим соответственно десятичную, восьмеричную, пятиричную, двоичную и другие системы счисления. Количество различных цифр, применяемых в позиционной системе счисления, равно основанию p . Например, в десятичной системе счисления используются десять цифр: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9; в пятиричной - пять цифр: 0,1,2,3,4 и т.д.

Любое число в позиционной системе счисления записывается в виде последовательности цифр, разделенных запятой на целую и дробную части. С помощью этих цифр числа записываются в сокращенной форме. Например, запись 6207,3 представляет собой следующую сумму:

$$6207,3 = 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1}.$$

Слева от знака равенства число записано в сокращенной записи, а справа - в виде суммы степеней десяти с соответствующими коэффициентами (полная запись числа). Как видим, в сокращенной записи число изображается с помощью коэффициентов, стоящих перед степенями основания системы счисления.

Чтобы получить сокращенную запись числа в любой системе счисления, его надо представить в виде суммы степеней основания системы счисления с соответствующими коэффициентами:

$$N_p = K_n \cdot p^n + K_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + K_i \cdot p^i + \dots + K_1 \cdot p^1 + K_0 \cdot p^0 + K_{-1} \cdot p^{-1} + \dots \quad (1)$$

Здесь: N_p - число в p -ичной системе счисления; p - основание системы; i - номер разряда; K_i - коэффициент, стоящий в i -ом разряде.

Сокращенная запись числа N_p будет иметь вид:

$$N_p = K_n K_{n-1} \dots K_i \dots K_1 K_0 K_{-1} \dots \quad (2)$$

Двоичная система счисления. Двоичная система счисления имеет только две цифры: 0 и 1. Это минимальное количество цифр, которое может быть принято в системе счисления. Основание системы два записывается как 10_2 .

В соответствии с выражением (1) число N_2 представляет собой сумму:

$$N_2 = K_n \cdot 2^n + K_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + K_i \cdot 2^i + \dots + K_1 \cdot 2^1 + K_0 \cdot 2^0 + K_{-1} \cdot 2^{-1} + \dots$$

Здесь коэффициенты K_i ($i=n, n-1, \dots$) могут принимать только два значения: 0 и 1. Запишем теперь в двоичной системе счисления число 85:

$$85 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0, \text{ или } 85 = 1010101_2.$$

Восьмеричная система счисления. Цифры - 0,1,2,3,4,5,6,7. Число восемь (основание системы) записывается двумя цифрами как 10, т.е. $8=10_8$.

Запишем в восьмеричной системе число восемьдесят пять (85). В соответствии с выражением (1) разложим число 85 по степеням основания:

$$85 = \underbrace{1 \cdot 8^2}_{64} + \underbrace{2 \cdot 8^1}_{16} + \underbrace{5 \cdot 8^0}_5$$

Коэффициенты перед степенями восьмерок дадут сокращенную запись числа: $85 = 125_8$ (индекс снизу указывает основание системы счисления).

ления; для десятичной системы счисления индекс можно не указывать).

Шестнадцатиричная система счисления. Для написания шестнадцатиричных чисел требуется 16 различных цифр. Десять первых из них совпадают с соответствующими цифрами десятичной системы: 0,1,...,9. Для обозначения шести следующих цифр, отвечающих значениям десятичных чисел 10, 11, 12, 13, 14, 15 используются буквы латинского алфавита A, B, C, D, E, F соответственно.

Число шестнадцать (основание системы) записывается как 10_{16} .

Запишем в шестнадцатиричной системе число 85.

$$85 = \underbrace{5 \cdot 16^1}_{80} + \underbrace{5 \cdot 16^0}_5 = 55_{16}.$$

Сделаем еще два примера:

$$500 = 1 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 = 1F4_{16}.$$

$$971 = 3 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 3CB_{16}.$$

Аналогичным образом будут записываться числа в системах счисления с другими основаниями. Справа даётся таблица (табл.3.1.), в которой для сравнения приводятся записи чисел от нуля до двадцати в различных системах счисления - $p=10, 2, 3, 5, 8, 16$.

Системы счисления					
Десятичная	двоичная	Троичная	Пятиричная	Восьмеричная	Шестнадцатиричная
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	10	2	2	2	2
3	11	10	3	3	3
4	100	11	4	4	4
5	101	12	10	5	5
6	110	20	11	6	6
7	111	21	12	7	7
8	1000	22	13	10	8
9	1001	100	14	11	9
10	1010	101	20	12	A
11	1011	102	21	13	B
12	1100	110	22	14	C
13	1101	111	23	15	D
14	1110	112	24	16	E
15	1111	120	30	17	F
16	10000	121	31	20	10
17	10001	122	32	21	11
18	10010	200	33	22	12
19	10011	201	34	23	13
20	10100	202	40	24	14

Системы счисления, применяемые в цифровых ЭВМ

В ЭВМ используются следующие системы счисления:

1. Двоичная система счисления - в качестве *рабочей*;
2. Десятичная система счисления - для записи исходной информации и выдачи результатов;

3. Восьмеричная система счисления;
4. Шестнадцатеричная система счисления;
5. Смешанная (двоично-десятичная) система счисления.

Восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления являются вспомогательными. Они применяются при подготовке задач к решению (программировании на языках ассемблере, машинном и др.). Данные системы удобны тем, что 8-ричная запись какого-либо числа в три раза короче его двоичной записи, а 16-ричная запись - в четыре раза. Что касается перевода чисел из одной системы в другую, а именно по схемам $8 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 8$, $16 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 16$, то он не вызывает каких-либо затруднений и может выполняться чисто механическим путем.

Двоично-десятичная система счисления также является вспомогательной и используется, в основном, для хранения десятичных чисел в памяти ЭВМ. Запись десятичных чисел в двоично-десятичной с.с. осуществляется следующим образом. Каждая цифра десятичного числа записывается ее двоичным эквивалентом. Для такой записи потребуется не более четырех двоичных разрядов. Четырехзначное двоичное число, изображающее десятичную цифру, называется *тетрадой*.

Для того чтобы некоторое десятичное число представить в двоично-десятичной форме, необходимо каждую его цифру записать соответствующей ей тетрадой. Возьмем, например, десятичное число 3795,28 и запишем его в двоично-десятичном виде:

3	7	9	5,	2	8
0011	0111	1001	0101,	0010	1000

Т.о., десятичное число 3795,28 будет иметь такую двоично-десятичную запись: 0011011110010101,00101000.

Переход от десятичной к двоично-десятичной записи производится, как видим, элементарно и не требует каких-либо вычислений.

Для обратного перевода (от двоично-десятичной записи к десятичной) необходимо двоично-десятичное число влево и вправо от запятой разбить на четверки цифр (тетрады), а затем каждую из них записать отвечающей ей десятичной цифрой.

Пусть, например, дано двоично-десятичное число: 010110000110,00110111. Разобьем его на тетрады и заменим каждую тетраду десятичной цифрой:

0101 1000 0110, 0011 0111 = 586,37.

п.3. Перевод чисел из одной с.с. в другую

Общее правило для перевода целых чисел. Для перевода целого числа из одной позиционной системы счисления в другую, его надо последовательно *разделить* на основание q той системы, в которую оно переводится. Деление производится до тех пор, пока не получим частное, меньшее чем q . Число в новой системе счисления запишется в виде *остатков* деления, начиная с последнего. Последнее частное дает старшую цифру числа. Перевод производится в той системе счисления из которой переводим. Примеры:

1) Найти двоичную запись числа 30
($30_{10} \rightarrow N_2$).

$$\begin{array}{r}
 30 | 2 \\
 \hline
 30 \quad 15 \quad | 2 \\
 \hline
 \textcircled{0} \quad 14 \quad 7 \quad | 2 \\
 \hline
 \quad \textcircled{1} \quad 6 \quad 3 \quad | 2 \\
 \hline
 \quad \quad \textcircled{1} \quad 2 \quad \textcircled{1} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \textcircled{1}
 \end{array}
 \rightarrow \text{Старшая цифра результата}$$

$$30 = 11110_2$$

3) $28_{10} \rightarrow N_{16}$.

$$\begin{array}{r}
 28 | 16 \\
 \hline
 16 \quad \textcircled{1} \\
 \hline
 \textcircled{12}
 \end{array}$$

Поскольку десятичное число 12 в 16-ричной системе счисления обозначается цифрой (буквой) C, получим: $28_{10} = 1C_{16}$.

2) $177_{10} \rightarrow N_8$.

$$\begin{array}{r}
 177 | 8 \\
 \hline
 176 \quad 22 \quad | 8 \\
 \hline
 \textcircled{1} \quad 16 \quad \textcircled{2} \rightarrow \text{Старшая цифра результата} \\
 \hline
 \quad \textcircled{6}
 \end{array}$$

$$177_{10} = 261_8.$$

4) $85_{10} \rightarrow N_8$.

$$\begin{array}{r}
 85 | 8 \\
 \hline
 80 \quad 10 \quad | 8 \\
 \hline
 \textcircled{5} \quad 8 \quad \textcircled{1} \\
 \hline
 \quad \textcircled{2}
 \end{array}$$

$$85_{10} = 125_8.$$

Общее правило для перевода правильных дробей. Для перевода правильной дроби из одной позиционной системы счисления в другую, ее надо последовательно *умножить* на основание q той системы, в которую оно переводится. Перемножаются только дробные части. Дробь в новой системе запишется в виде целых частей получающихся произведений, начиная с первого.

Примеры.

1) $0,3125_{10} \rightarrow N_2$.

$$\begin{array}{r}
 \times 0,3125 \\
 \hline
 \quad 2 \\
 \hline
 \textcircled{0} 6250 \\
 \hline
 \quad 2 \\
 \hline
 \textcircled{1} 2500 \\
 \hline
 \quad 2 \\
 \hline
 \textcircled{0} 5000 \\
 \hline
 \quad 2 \\
 \hline
 \textcircled{1} 0000
 \end{array}$$

2) $0,43_{10} \rightarrow N_8$.

$$\begin{array}{r}
 0,43 \\
 \hline
 \quad 8 \\
 \hline
 3,44 \\
 \hline
 \quad 8 \\
 \hline
 3,52 \\
 \hline
 \quad 8 \\
 \hline
 4,16 \\
 \hline
 \quad 8 \\
 \hline
 1,28
 \end{array}$$

3) $0,29 \rightarrow N_2$.

$$\begin{array}{r}
 0,29 \\
 \hline
 \quad 2 \\
 \hline
 0,58 \\
 \hline
 \quad 2 \\
 \hline
 1,16 \\
 \hline
 \quad 2 \\
 \hline
 0,32 \\
 \hline
 \quad 2 \\
 \hline
 0,64
 \end{array}$$

4) $0,17 \rightarrow N_{16}$

$$\begin{array}{r}
 0,17 \\
 \hline
 \quad 16 \\
 \hline
 2,72 \\
 \hline
 \quad 16 \\
 \hline
 11,52 \\
 \hline
 \quad 16 \\
 \hline
 8,32 \\
 \hline
 \quad 16 \\
 \hline
 5,12
 \end{array}$$

$$0,3125_{10} = 0,0101_2. \quad 0,43_{10} = 0,3341..._8. \quad 0,29_{10} = 0,0100..._2. \quad 0,17_{10} = 0,2B85..._{16}.$$

Этот процесс необязательно будет конечным, как для целых чисел. Он может продолжаться для любого числа значащих цифр. Если получаемая дробь бесконечная, она может быть *периодической* (иметь повторяющиеся группы цифр - период) или *непериодической*. Например, десятичная дробь 0,15 выражается периодической дробью вида:

$$0,15 = 0,00100110011001..._2 = 0,00(1001)_2.$$

В скобках указан период двоичной дроби.

Общее правило для перевода неправильных дробей. При переводе неправильных дробей отдельно переводят целую и дробную части по своим правилам.

Пример: $37,41_{10} \rightarrow N_8$.

$$\begin{array}{r} 37 \overline{) 8} \\ \underline{32} \\ 5 \end{array}$$

$$37 = 45_8.$$

$$0,41 = 0,3217..._8.$$

$$37,41_{10} = 45,3217..._8.$$

$$0,41$$

$$\underline{8}$$

$$3,28$$

$$\underline{8}$$

$$2,24$$

$$\underline{8}$$

$$1,92$$

$$\underline{8}$$

$$7,68$$

...

Перевод чисел из любой системы счисления в десятичную. Перевод чисел из любой системы счисления в десятичную можно осуществить, используя свойство позиционной системы счисления (представление любого числа в виде многочлена по степеням основания) и выполняя действия над числами, представленными в привычной для нас десятичной системе. Примеры:

1) Дано двоичное число 101101_2 . Получить его десятичную запись ($101101_2 \rightarrow N_{10}$).

$$101101_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 = 45.$$

$$101101_2 = 45_{10}.$$

2) $1DA9_{16} \rightarrow N_{10}$.

$$1DA9_{16} = 1 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 9 \cdot 16^0 = 4096 + 3328 + 160 + 9 = 7593$$

$$1DA9_{16} = 7593_{10}.$$

Если основание r -ичной системы счисления является степенью основания q -ичной системы, т.е. $r = q^k$ (k - целое число), то перевод числа из r -ичной системы счисления в q -ичную систему счисления и, наоборот можно выполнить по более простым правилам: переводу каждой цифры в отдельности.

Перевод числа из восьмеричной системы счисления в двоичную и обратно.

Т.к. $8 = 2^3$, то для перевода в 8-ричного числа в двоичную систему счисления достаточно каждую восьмеричную цифру заменить ее двоичным представлением (двоичной *триадой*).

$$0 - 000_2$$

$$4 - 100_2$$

Примеры:

$$1 - 001_2$$

$$5 - 101_2$$

$$1) 35_8 = 011 \ 101_2$$

$$2 - 010_2$$

$$6 - 110_2$$

$$2) 741,5_8 = 111 \ 100 \ 001, \ 101_2$$

$$3 - 011_2$$

$$7 - 111_2$$

Для обратного перевода (из 2-ичной системы счисления в 8-ричную систему счисления) следует двоичное число разбить на триады влево и вправо от запятой, и каждую триаду заменить соответствующей ей 8-ричной цифрой. Если при разбиении самая левая или самая правая тройки оказываются неполными - их дополняют путем приписывания нулей. Примеры:

$$1) 101110_2 = 101 \ 100_2 = 56_8.$$

$$2) 11101110,0001111_2 = 011\ 101\ 110,000\ 111\ 100_2 = 356,074_8$$

Перевод чисел из шестнадцатичной системы счисления в двоичную и обратно. Т.к. $16=2^4$, то для перевода 16-ричного числа в 2-ичную с.с. достаточно каждую 16-ричную цифру заменить соответствующей ей двоичной тетрадой. Приведем эти тетрады:

0 - 0000	8 - 1000
1 - 0001	9 - 1001
2 - 0010	A - 1010
3 - 0011	B - 1011
4 - 0100	C - 1100
5 - 0101	D - 1101
6 - 0110	E - 1110
7 - 0111	F - 1111

Примеры:

$$1) 27E_{16} = 0010\ 0111\ 1110_2 = 001001111110_2.$$

$$2) 4D,0F_{16} = 01001101,00001111_2.$$

Для обратного перевода (из 2-ичной системы счисления. в 16-ричную систему счисления) следует двоичное число разбить на тетрады влево и вправо от запятой, и каждую тетраду заменить соответствующей ей 16-ричной цифрой. Если при разбиении самая левая или самая правая четверки оказываются неполными - их дополняют путем приписывания нулей. Примеры:

$$1) 101110_2 = 0010\ 1110_2 = 2E_{16}.$$

$$2) 10111,101_2 = 00010111,1010_2 = 17,A_{16}.$$

п.4. Арифметика двоичных чисел

Для выполнения четырех арифметических действий в любой системе счисления необходимо знать таблицы сложения и умножения. В двоичной системе счисления эти таблицы очень просты.

Таблица сложения

a \ b	0	1	10
0	0	1	10
1	1	10	11
10	10	11	100

Таблица умножения

a \ b	0	1	10
0	0	0	0
1	0	1	10
10	0	10	100

Пользуясь данными таблицами, можно выполнять арифметические действия над двоичными числами по тем же правилам, что и для десятичных чисел.

Примеры на сложение и вычитание:

$$\begin{array}{r} 10111,11 \\ + 11001,10 \\ \hline 110001,01 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1101,011 \\ - 1010,110 \\ \hline 10,101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11000101 \\ - 10101110 \\ \hline 10111 \end{array}$$

Примеры на умножение и деление:

$$\begin{array}{r} 10111,01 \\ \times 10,11 \\ \hline 1011101 \\ 1011101 \\ \hline 1011101 \\ \hline 111111,1111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110101110 \mid 1010 \\ - 1010 \\ \hline 1101 \\ - 1010 \\ \hline 1111 \\ - 1010 \\ \hline 1010 \\ - 1010 \\ \hline 0 \end{array}$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Расскажите об информационных процессах в природе и обществе.
2. Расскажите об информационной деятельности человека.
3. Изображение на экране монитора “Samsung SyncMaster 550b” состоит из 1280 строк по 1028 точек каждая. Какой объем памяти необходим для запоминания одного черно-белого изображения без полутонов, т.е. когда каждая точка может быть либо белой, либо черной?
4. Оперативная память ЭВМ Pentium II имеет объем 128 Мбайт (т.е. может запомнить 128 Мегабайт информации). Сколько примерно страниц книги можно уместить в эту память?
5. Сколькими битами можно закодировать предложение “Информатика – это научная дисциплина”. Сколько получится байт, килобайт, мегабайт?
6. Перевести из десятичной системы счисления в другую:

а) $158_{10} \rightarrow N_2$	б) $632_{10} \rightarrow N_8$	в) $356_{10} \rightarrow N_{16}$
г) $0,115_{10} \rightarrow N_2$	д) $0,745_{10} \rightarrow N_8$	е) $0,355_{10} \rightarrow N_{16}$
ж) $352,615_{10} \rightarrow N_2$	з) $632_{10} \rightarrow N_8$	
7. Перевести в десятичную систему счисления из другой:

а) $1011,11_2$	б) $356,71_8 \rightarrow N_{10}$	в) $4A,C8_{16} \rightarrow N_{10}$
----------------	----------------------------------	------------------------------------
8. Перевести из двоичной системы счисления в восьмеричную и шестнадцатеричную:

а) $101101,11011_2 \rightarrow N_8$	б) $100010,10011_2 \rightarrow N_{16}$
в) $100010,10011_2 \rightarrow N_8$	г) $101101,11011_2 \rightarrow N_{16}$
9. Перевести из восьмеричной и шестнадцатеричной систем счисления в двоичную:

а) $63CD,7A_{16} \rightarrow N_2$	б) $371,264_8 \rightarrow N_2$
в) $3A9FE,C81B_{16} \rightarrow N_2$	г) $5137,26_8 \rightarrow N_2$
10. Перевести из восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную:

а) $473,162_8 \rightarrow N_{16}$	б) $5247,36_8 \rightarrow N_{16}$
-----------------------------------	-----------------------------------
11. Перевести из шестнадцатеричной системы счисления в восьмеричную:

а) $95EC,7B_{16} \rightarrow N_8$	б) $1D9AF,C73B_{16} \rightarrow N_8$
-----------------------------------	--------------------------------------
12. Выполнить все арифметические операции с данными парами чисел, представленными в двоичной системе счисления:

а) 1010110 и 11100	б) 11011 и 101
------------------------	--------------------
13. Выполнить арифметические действия над числами, представленными в двоичной системе счисления:

а) $101011,11 + 101,1101$	б) $11011,11011 + 111,00101$
в) $101101,101 - 1011,1011$	г) $11011,011 - 101,11$
д) $110,101 * 0,11$	е) $10111,10101 * 1101$
ж) $1101101,111 * 10,101$	з) $101,11 * 11,011$
и) $10001111 : 1011$	к) $101011111 : 1101$

§10 Архитектура ЭВМ. Программное обеспечение ЭВМ

п.1 Этапы развития вычислительной техники.

В истории развития вычислительной техники (ВТ) можно выделить 4 основных периода:

- 1) Домеханический (до 17 века);
- 2) Механический (17-19 век);
- 3) Электромеханический (19-середина 20 веков)
- 4) Электронный (середина 20 века по наши дни)

С древнейших времен человек конструирует себе в помощь различные приспособления для облегчения вычислений.

- | | | |
|---------------------|---|---|
| Домеханический | { | 1. В 5 веке до н. э. греки и египтяне использовали абак – устройство, похожее на русские счеты, а китайцы – китайские счеты суан-пан. |
| Механический | { | 2. В 1642 г. известный математик, физик, философ Блез Паскаль изобрел и изготовил механическое устройство-вычислитель, позволяющее складывать числа. |
| | | 3. В 1673 году немецкий математик Лейбниц изобрел арифметическую машину, выполняющую все 4 арифметических действия. |
| | | 4. В 1821 году известный конструктор Чарльз Томас усовершенствовал и наладил серийный выпуск счетного устройства, изобретенного Лейбницем, и назвал его арифмометром (этот прибор перемножал 2 восьмизначных числа за 18 секунд). |
| | | 5. В 1823 г. английский математик Чарльз Беббидж изобрел первую программируемую вычислительную машину, содержащую все основные компоненты современных машин. Эту машину называли аналитической машиной. Но проект Беббиджа намного опережал технические возможности своего времени и не был реализован. Однако программы для этой машины были созданы. Их составила первая женщина-программист дочь Джона Байрона герцогиня Ада Лавлейс (в честь ее назван язык программирования АДА). И лишь в 40 годах 20 века удалось создать такую машину на основе электромеханических реле (реле – это элемент, имеющий два рабочих состояния “включено”, “выключено”). |
| Электромеханический | { | 6. В конце 30-годов 20 века американцы Дж. Атанасов и К.Берри построили ЭВМ, включавшую в себя электронную память и электронное устройство сложения и вычитания, а также ряд механических компонент. |
| Электронный | { | 7. В 1946 году в США была создана первая полностью электронная вычислительная машина “ЭНИАК”, разработанная Джоном фон Нейманом. |
| | | 8. В 1949 году подобная машина появилась в Англии под руководством Уилкса (Кембриджский университет) и называлась |

EDSAC.

9. В 1950 году была создана в Киеве МЭСМ (малая электронно-счетная машина), а в 1952 году в Москве – БЭСМ (быстродействующая электронная счетная машина).

п.2 Поколения ЭВМ.

С середины 50-х годов начался бурный рост вычислительной техники. Каждый этап развития ЭВМ определялся тем материалом, из которого они изготавливались, т.е. элементной базой. Поэтому принято говорить о поколениях ЭВМ. Можно выделить 4 поколения ЭВМ:

- 1) 1946-середина 50 х годов. Элементная база – электронно-вакуумные лампы, быстродействие 10-20 тысяч операций (сложений и сдвигов) в секунду. Примеры: ЭНИАК, ЭДСАК, БЭСМ, МЭСМ, УРАЛ (1954 г.), М-20 (1957 г.), “Стрела”, “Минск-1”.
- 2) Середина 50 х до середины 60 х. Элементная база – полупроводниковые элементы (транзисторы, диоды), быстродействие – 100000-1000000 операций в секунду. Примеры: RCA-501 (США 1959), Минск-22, Минск-32, М-220, Мир, Наир и др.
- 3) Середина 60 х – середина 70 х. Элементная база – интегральные схемы среднего уровня интеграции (ИС), быстродействие – сотни тысяч операций в секунду. Примеры: IBM-360 (США 1964), Урал-12, ЕС ЭВМ (машины единой серии), СМ ЭВМ (средние машины).
- 4) Середина 70 х до наших дней. Элементная база – большие интегральные схемы. Используются микропроцессоры (т.е. процессоры, размещенные на одном кристалле). Примеры: Эльбрус-2, М-10 (это большие ЭВМ), IBM PC 286, 386, 486, Pentium (это персональные ЭВМ) и др. Сейчас разрабатываются ЭВМ на сверх больших интегральных схемах.

п.3 Архитектура ЭВМ

Опр 10.3.1 ЭВМ – это программируемое электронное устройство обработки и накопления информации.

По своим размерам, быстродействию (т.е. количеству выполняемых операций в секунду), объему памяти современные ЭВМ делятся на следующие классы:

- СуперЭВМ (типа Cray и Эльбрус);
- Большие ЭВМ (типа ЕС-1066);
- Средние ЭВМ (типа ЕС-1022, IBM-360);
- Мини-ЭВМ (типа Eclipse, PDP (СМ-ЭВМ));
- МикроЭВМ или персональные компьютеры (типа “Электронника-60”, Celeron 650, Pentium III).

Микро ЭВМ или персональные компьютеры используются для автоматизации отдельных рабочих мест, для обработки деловой информации, в быту и т.д.

Мини ЭВМ имеют большое количество дополнительных устройств – это

средства для автоматизации различных технологических процессов, научных исследований, проектно-конструкторских работ и т.д.

Средние и большие ЭВМ используются для решения задач управления производством, имеют большой объем памяти.

СуперЭВМ применяются в решении сложнейших народнохозяйственных задач и проведении научных экспериментов (космические проекты, геофизические исследования и т.д.).

Однако какой бы из современных компьютеров мы не рассматривали – от самых маленьких до самых мощных, почти все они имеют общую принципиальную схему (архитектуру) (Рис. 43).

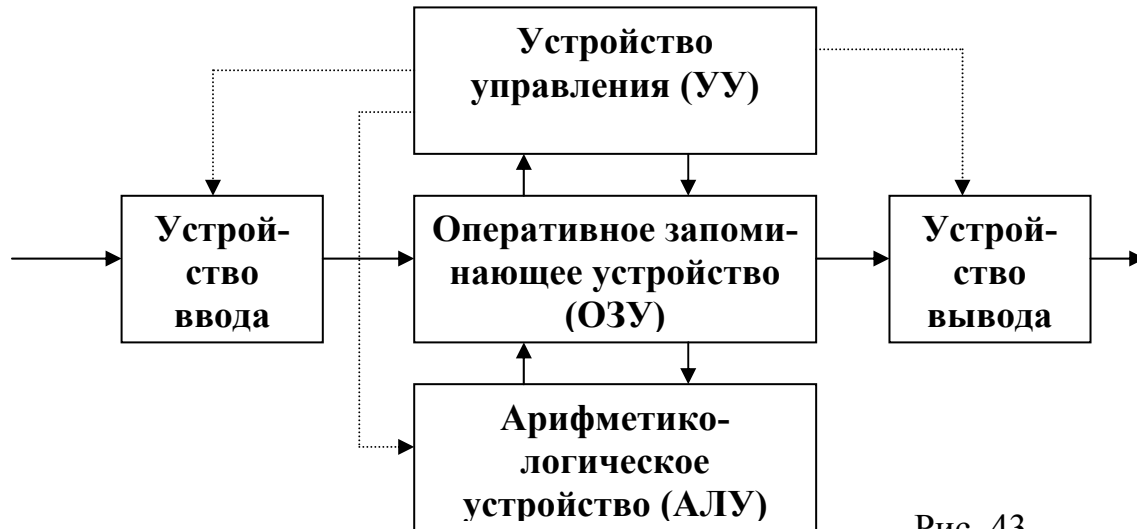


Рис. 43

Схема была предложена в 1946 году Джоном фон Нейманом (США). Т.о., в состав ЭВМ входят 5 основных устройств:

- Устройство ввода служит для ввода исходной информации в ЭВМ
- Устройство вывода служит для вывода результатов вычислений из памяти ЭВМ.
- АЛУ служит для выполнения арифметических и логических операций над числами;
- УУ служит для управления работой всего компьютера в процессе вычислений
- ОЗУ служит для приема, хранения и выдачи чисел

} Процессор

Основной принцип работы ЭВМ был предложен также Джоном фон Нейманом и получил название принципа программного управления.

Опр 10.3.2 Принцип действия ЭВМ, согласно которому переработка машиной исходных данных в конечный результат производится в соответствии с заранее составленной и введенной в машину программой называется *принципом программного управления*.

п.4 Персональный компьютер IBM PC: принцип открытой архитектуры, основные узлы, их назначение и характеристики,

Компьютер – это устройство для обработки и хранения информации. Фирма IBM разработала и выпустила на рынок несколько моделей IBM-

совместимых компьютеров (IBM - PC, IBM – PC XT, IBM – PC AT). Персональные ЭВМ (типа IBM – PC) являются компьютерами с открытой архитектурой, т.е. компьютер не единое неразъемное устройство, а собран из независимо изготовленных частей, подобно конструктору.

Теперь рассмотрим основные и дополнительные технические средства персональной ЭВМ.

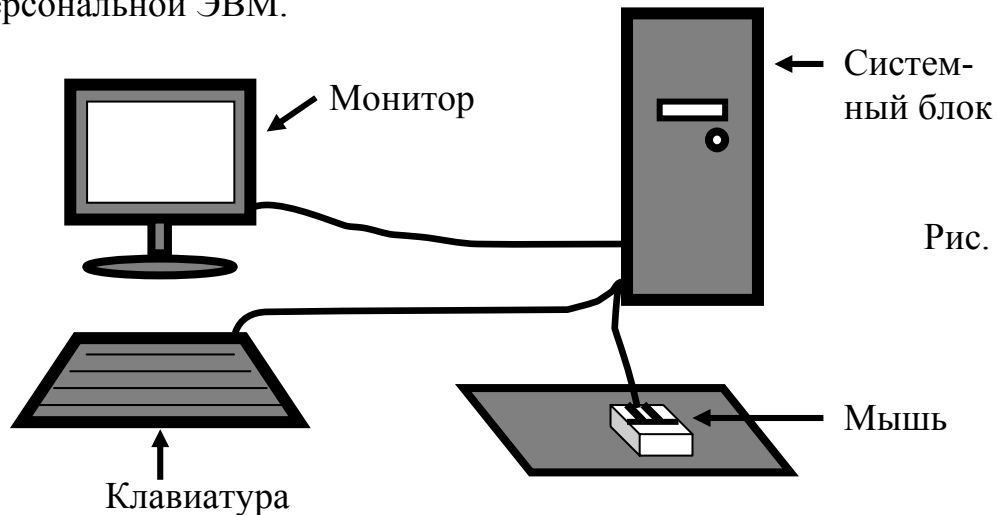


Рис. 44

Основные технические средства (Рис. 44):

- | | |
|-------------------|------------|
| 1. Системный блок | 2. Монитор |
| 3. Клавиатура | 4. Мышь |

Системный блок содержит в себе средства обработки информации (процессор) хранения информации (оперативная память, винчестер) и частично ввода – вывода информации (дисководы).

Т.к. IBM – совместимые компьютеры обладают принципом открытой архитектуры, то главное в компьютере – это материнская (системная) плата, на которой размещены блоки, позволяющие обрабатывать информацию (процессор, сопроцессор), частично хранить информацию (оперативная память). Схемы, управляющие всеми остальными устройствами компьютера – монитором, дисками и др. реализованы на отдельных платах, которые вставляются в специальные разъемы – слоты. Отдельно имеется (Рис. 45):

1. дисковод CD-ROM.
2. дисковод флоппи дисков (3,5 дюймовых дисков),



Рис. 45

3. винчестер или жесткий диск (для долговременного хранения информации (Рис. 46).

Жесткий диск находится внутри системного блока (поэтому никакая из его частей не видна на корпусе системного блока). Если снять верхнюю крышку герметично запаянного дисководового жесткого диска, то вы увидите сам диск и считывающую головку дисководового.

Рис. 46



Ко всем электронным схемам подводится электрическое питание из единого блока питания, а для удобства и на-

дежности все это заключается в общий корпус. Корпусы бывают двух видов: tower (вертикальное расположение) и desk-top (горизонтальное расположение) (Рис. 47).

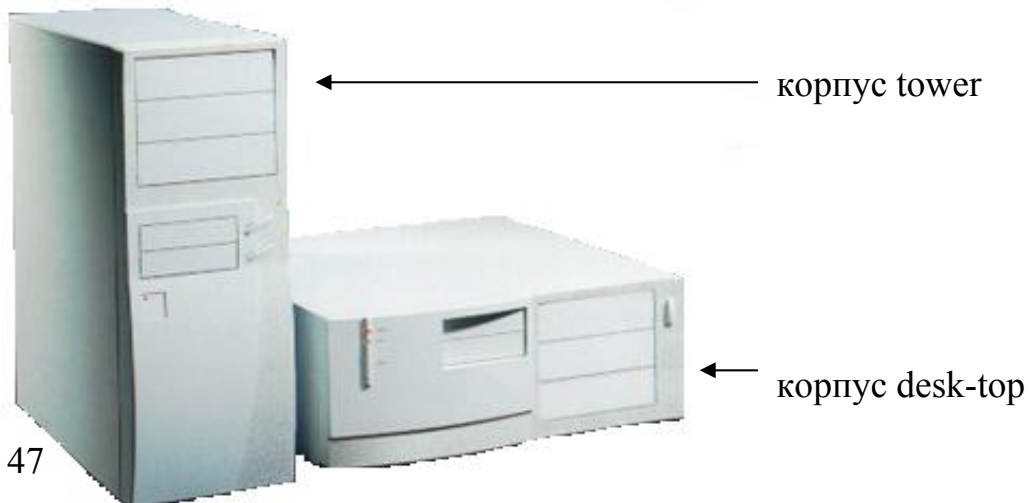


Рис. 47

Монитор (Рис. 48) бывает различных типов: EGA, VGA, Super VGA, LCD (жидкокристаллический). Главное, чем больше разрешающая способность (количество точек на экране) – тем более мелкие детали можно различить на экране.



Рис. 48

Клавиатура (Рис. 49) предназначена для ввода информации в компьютер. Компьютеры снабжаются обычно 101-клавишной клавиатурой. Стандартная клавиатура IBM PC/AT во многом напоминает клавиату-



Рис. 49

ру пишущей машинки и содержит дополнительные клавиши, имеющие специальное значение для MS-DOS и WINDOWS.

Мышь все больше становится неотъемлемой составной частью компьютера. Передвигая мышь по коврику на столе, мы одновременно управляем передвижением курсора на экране; нажатие на клавишу мыши вводит координаты курсора в работающую программу. Мыши обычно выпускаются трехклавишными (Рис. 50а), но большинство программ использует только две клавиши — левую и правую (Рис. 50 б). Чаще всего (но в зависимости от настройки компьютера) основной является левая клавиша, с помощью нее Вы управляете компьютером;



Рис. 50 а



Рис. 50 б

дополнительной является правая клавиша, ее нажатие вызывает динамическое меню работы с объектом: своеобразной подсказки по возможным операциям. Мышь бывает механическая (как наша) и оптическая (ее работа основана на излучении светодиодами красного и инфракрасного цветов и принятием фотодетекторами отраженного света).

Дополнительные технические средства:

1. принтер (печать на бумажный носитель) (Рис. 51). Принтеры бывают матричные, струйные, лазерные и др. (На рисунке нижний левый принтер матричный, остальные – струйные);



Рис. 51

2. CD-ROM (устройство для чтения компакт-дисков);
3. видео карта;
4. звуковая карта;
5. модем (Рис. 52) (позволяет обмениваться информацией через телефонную сеть). Модемы бывают внешние (как на рисунке) и встроенные. Встроенные модемы размещаются в слоты на материнской плате и не видны на внешней части корпуса;
6. сканер (Рис. 53) (позволяет считывать непосредственно в компьютер с бумаги рисунки, печатные, а иногда и рукописные тексты). Сканеры бывают ручные, листопротяжные, планшетные. На рисунке правый верхний –



Рис. 52



Рис. 53

планшетный сканер, правый нижний – ручной сканер, остальные – листопротяжные; трекбол, стример, плоттер, магнито-оптические диски и другие устройства.

п. 5 Программное обеспечение.

Компьютер представляет собой единство аппаратных средств (Hardware) и программных средств (Software).



Программное обеспечение - это то, что «оживляет» компьютер. Без программ машина представляла бы собой кучу ненужной дорогой электроники. Следовательно, для эффективного использования компьютера необходимо не только иметь аппаратную часть ЭВМ (“железо”), но иметь в наличии и знать назначение и свойства необходимых при работе с ним программ. Меняя программы, компьютер можно превратить в рабочее место бухгалтера или конструктора, учителя или врача, юриста или политика, статистика или агронома и т.д.

По функциональному назначению все программы, работающие в компьютере, можно разделить на три категории:

1. системные программы;
2. прикладные программы;
3. инструментальные системы (системы программирования).

Системные программы

Число всех разновидностей системных программ велико. Они осуществляют проверку работоспособности и управление устройствами компьютера, выполняют различные вспомогательные функции (например, создание копий используемой информации, получение справочной информации о компьютере) и т.д. Опишем некоторые из них.

Встроенная система ввода-вывода (BIOS). Хранится в постоянной памяти компьютера. Она раскладывает до примитивных операций все команды, относящиеся к вводу или выводу данных из компьютера. Например, дисковод понимает только команды вида: поместить головку дисковода на определенную дорожку, считать сектор и т.п. Если каждая программа будет содержать в себе команды такого уровня, то она будет неэффективно работать и занимать много места. Также BIOS содержит в себе тест функционирования компьютера, проверяющий работу памяти и других устройств ЭВМ при включении электропитания. Помимо этого, BIOS осуществляет начальную загрузку *операционной системы* с диска A: или диска C: (в зависимости от установок SETUP) в оперативную память машины.

Операционная система. Является как бы прослойкой между базовой системой ввода-вывода BIOS и всеми остальными программами. Загружается автоматически при включении компьютера. Ее основные задачи:

- осуществление диалога устройств компьютера с прикладными программами и пользователем,

- распределение ресурсов компьютера (оперативной памяти, места на дисках и т.п.),
- запуск прикладных программ и обработка запросов из этих программ на выполнение операций ввода-вывода,
- предоставление пользователям возможностей общего управления машиной.

Наибольшее распространение на IBM-совместимых компьютерах получила операционная система MS-DOS, разработанная фирмой Microsoft Corporation. Помимо нее используются операционные системы: PC-DOS (фирма IBM), DR-DOS (фирма Digital Research), OS/2, UNIX, WINDOWS 98, WINDOWS 2000 и др.

Программы-оболочки. Их задача - максимально упростить диалог пользователя с компьютером (они обеспечивают более удобный и наглядный способ общения человека с компьютером, чем с помощью командной строки DOS).

Наиболее популярными на сегодняшний день являются программы-оболочки: Norton Commander, Dos Navigator, Volcov Commander, FAR. Часто также используются: XTree Pro Gold, PC Shell и др. Наряду с обычными *программами-оболочками* применяются *операционные оболочки*, которые не только дают пользователю более наглядные средства для выполнения часто используемых действий (графический интерфейс), но и предоставляют новые возможности для запускаемых прикладных программ (мультипрограммирование, т.е. возможность одновременного выполнения нескольких программ, и расширенные средства для обмена информацией между программами). Ярким примером операционной оболочки может служить Microsoft Windows 3.1, 3.11. Значительно реже используются операционные оболочки: DesqView, GEM, GeoWorks и др.

Драйверы. ЭВМ может иметь довольно большой набор внешних устройств (клавиатура, монитор, мышь, гибкие и жесткие диски, принтер и т.п.). Для управления их работой используются программы-драйверы. Каждому типу внешнего устройства сопоставляется свой драйвер. С помощью программ-драйверов возможно подключение к компьютеру новых устройств или нестандартное использование имеющихся (драйверы стандартных устройств образуют в совокупности базовую систему ввода-вывода (BIOS)). Примерами программ-драйверов могут служить:

драйвер мыши	mouse.com	
драйвер клавиатуры	keyrus.com	
драйвер расширенной памяти	himem.sys	
драйвер таблицы знакогенератора	country.sys	и др.

Утилиты. Это программы вспомогательного назначения.

Программы для диагностики компьютера позволяют проверить конфигурацию компьютера (количество памяти, типы дисков и т.п.), а также проверить работоспособность устройств компьютера (прежде всего жестких и гибких дисков). Большой популярностью пользуются программы: проверка конфигурации компьютера Check-It; проверка и

лечение диска NDD (Norton Disk Doctor), проверка работоспособности диска Calibrate; диагностика системы NDIAGS; восстановление сбойных дисков DISKTOOL и др.

Программы для оптимизации дисков позволяют обеспечить более быстрый доступ к информации на диске за счет оптимизации размещения данных. В результате удаления файлов на диске образуются свободные области, которые заполняются при последующей записи новых файлов. Проблема заключается в том, что новый файл часто имеет размер, больший чем первая из свободных областей. В этом случае операционная система разбивает файл на несколько частей, которые помещаются в разные свободные области диска, т.е. фрагментирует файл. При считывании такого файла, операционной системе приходится собирать все фрагменты, перемещаясь по всему диску в их поиске. Это требует дополнительного времени и тем самым увеличивает время доступа к файлу. Программы для оптимизации дисков перемещают все участки каждого файла друг к другу (устраняют фрагментацию), собирают их в начале диска и т.д., за счет чего уменьшается число перемещений головок диска (т.е. ускоряется доступ к данным) и снижается износ диска. Из программ для оптимизации дисков широко используются SpeedDisk, FastTrax.

Программы динамического сжатия дисков позволяют увеличить количество информации, хранимой на дисках путем ее динамического сжатия. Эти программы сжимают информацию при записи на диск и развертывают (восстанавливают в исходном виде) - при чтении с диска. Примерами таких программ могут служить: Doublespace, Stacker, SuperStor и др.

Программы-упаковщики позволяют за счет применения специальных методов упаковки сжимать информацию на дисках, т.е. создавать архивы - копии файлов меньшего размера. Наиболее популярны упаковщики ARJ, ZIP, RAR и др.

Антивирусные программы предназначены для предотвращения заражения компьютерным вирусом и ликвидации последствий заражения. Наиболее известны антивирусные программы AIDSTEST, WEB, SCAN, VAKCINA, ADINF, AV, DOCTOR.

Коммуникационные программы предназначены для организации обмена информацией между компьютерами. Например: Brooklin Bridge, Telemate, Procomm, BitFax и др.

Программы управления локальной сетью: Lantastic, Netware Lite и т.д. и многие другие...

Прикладные программы

Прикладные программы представляют собой наиболее распространенный класс программных продуктов. Они составляют категорию программных средств, обращенных к пользователям персональных компьютеров - людям, которые не обязаны уметь программировать или даже знать

устройство ЭВМ. Их цель заключается либо в том, чтобы с помощью машины решать повседневные задачи, либо учиться определенным навыкам (с помощью демонстрационных и обучающих программ), либо проводить свой досуг, играя в компьютерные игры и т.д. Пишутся прикладные программы по принципу максимального удобства для пользователя и призваны решать всевозможнейшие задачи:

- подготовка текстов (документов) на компьютере - редакторы текстов [текстовые процессоры] (наиболее распространены: Lexicon, Microsoft Word);
- обработка табличных данных - табличные процессоры [электронные таблицы] (часто употребляемые: Lotus1-2-3, SuperCalc, Microsoft Excel, Quattro Pro);
- обработка массивов информации - системы управления базами данных (широко используются: Access, FoxPro, Clipper, Paradox);
- обработка графических данных - графические редакторы (на сегодня популярны: Paintbrush, Corel Draw).

Также применяются программы для обработки звуковой информации - музыкальные редакторы, для обработки видеoinформации, системы деловой и научной графики, системы автоматизированного проектирования, интегрированные системы, бухгалтерские программы, компьютерные игры, обучающие программы, электронные справочники и т.д.

Системы программирования

Даже при наличии десятков тысяч программ для IBM PC пользователям может потребоваться что-то такое, что не делают (или делают, но не так) имеющиеся программы. Вместе с тем, осваивая шаг за шагом прикладные программы, узнавая все более новые из них, пользователь неизменно подходит к той черте, за которой ему хочется не только работать с готовым программным обеспечением, но и пробовать свои силы в создании новой, пусть даже очень простой программы. Разработка системного и прикладного программного обеспечения на персональных компьютерах осуществляется с помощью систем программирования.

Современные системы программирования для персональных компьютеров представляют пользователю мощные и удобные инструментальные средства для разработки программ, к которым в первую очередь относятся:

- макроассемблеры (машинно-ориентированные языки);
- трансляторы (компилятор и(или) интерпретатор) с языка высокого уровня;
- средства редактирования, компоновки и загрузки программ;
- библиотеки подпрограмм, содержащие заранее подготовленные подпрограммы, которыми могут пользоваться программисты;
- различные вспомогательные программы: отладчики машинных программ, программы для получения перекрестных ссылок и т.д.

Для популярных языков программирования на IBM PC существует множество систем программирования. Естественно, что программисты предпочитают те системы, которые легки в использовании, позволяют получить эффективные программы, имеют богатые библиотеки функций (подпрограмм) и мощные возможности отладки разрабатываемых программ. В качестве примеров таких систем программирования можно назвать Turbo C (фирма Borland), Turbo C++ (фирма Borland), Zortech C (фирма Symantec), Turbo Pascal (фирма Borland), Microsoft C (фирма Microsoft), Microsoft Basic (фирма Microsoft), Turbo Basic (фирма Borland). Системы программирования прежде всего различаются по тому, какой инструментальный язык высокого уровня они реализуют. Среди программистов, пишущих программы для персональных компьютеров, наибольшей популярностью пользуются языки Си, Си++, Паскаль, Бейсик, Дельф. Также используются и много других языков программирования: Лисп и Пролог (для построения экспертных систем), Clipper и FoxPro (для создания информационных систем) и т.д.

§11 Алгоритм и его свойства. Методика составления алгоритмов.

п.1. Понятие алгоритма. Свойства алгоритмов.

Способы задания алгоритмов.

Понятие алгоритма возникло и используется давно. В зависимости от характера занятий людям в своей повседневной жизни встречаются различные практические задачи: пеленание ребенка, проезд в общественном транспорте, решение квадратного уравнения, поиск слова в словаре и т.д. Важно, что при решении любой подобной задачи человек обращается к продуманным заранее со всеми возможными вариантами предписаниям (инструкциям) о том, какие действия и в какой последовательности должны быть выполнены для решения задачи. В подавляющем большинстве случаев успех любой деятельности зависит от степени продуманности действий, их последовательности и возможных вариантов. Именно с целью успешного решения какого-то определенного класса задач вырабатываются системы таких предписаний для использования разными людьми.

Опр 11.1.1 *Алгоритм* - это система точных и понятных предписаний о содержании и последовательности выполнения конечного числа действий для решения задачи.

Согласно этому определению, рецепты изготовления какого-либо лекарства или печенья являются алгоритмами. И правило безопасного перехода пешеходом проезжей части улицы, содержащее указание человеку о его действиях, - тоже алгоритм.

Сам термин «алгоритм» ведет начало от перевода на европейские языки имени арабского математика IX в. аль-Хорезми, которым были описаны правила (в нашем понимании - алгоритмы) выполнения основных арифметических действий в десятичной системе счисления.

Задача составления алгоритма не имеет смысла, если неизвестны

или не учитываются возможности его исполнителя, ведь выполнимость алгоритма зависит от того, какие действия может совершить исполнитель. Например, прочесть алгоритм решения системы линейных уравнений графическим методом сможет и первоклассник, а выполнить его, конечно же нет. С другой стороны, малыш четырех- пяти лет не сможет прочесть правила (алгоритм) поведения за столом во время еды, но выполнить их сможет, если ему о них рассказать и показать, что они означают.

Важно также, что исполнителем алгоритмов может быть не человек, а автомат. Например, автомат по продаже газированной воды работает согласно разработанному специально для него алгоритму. Алгоритмом описывается работа любого механического устройства.

В ряду всевозможных автоматов компьютер является лишь частным (хотя и наиболее впечатляющим) примером исполнителя, чье поведение реализуется на основе алгоритма. Более того, создание компьютеров оказало воздействие на развитие теории алгоритмов, одной из областей математики.

От компьютера, как и от любого другого исполнителя, требуется четкое выполнение команд алгоритма. А от нас, как от разработчиков алгоритмов, требуется знание и соблюдение правил их составления. Эти правила заключаются в том, что алгоритм, предназначенный для исполнения автоматом, должен обладать пятью свойствами (удовлетворять пяти требованиям). Эти требования к алгоритму объясняются тем, что исполнитель-автомат не имеет своего интеллекта, его возможности всегда ограничены. Вот эти требования.

Свойства алгоритмов:

1. *Дискретность* - описываемый процесс должен быть разбит на последовательность отдельных шагов
2. *Понятность* - алгоритм ориентируется на определенного исполнителя и должен быть ему понятен
3. *Определенность* - алгоритм не должен оставлять места для произвола исполнителя
4. *Массовость* - применимость данного алгоритма к широкому классу задач данного типа
5. *Результативность* - обязательное получение результата за конечное число шагов.

Способы задания алгоритмов.

Алгоритмы могут быть представлены в виде формулы, таблицы, графического или словесного описания, а также описания на логарифмических языках. Рассмотрим некоторые из них.

1. Формулы. Математические формулы вместе с правилами их написания представляют собой своеобразный алгоритмический язык с успехом используемый для описания вычислительных алгоритмов некоторого специального вида. Например, $S = \frac{\pi d^2}{2} + \pi dH$ задает алгоритм вычисления

площади поверхности цилиндрического тела с диаметром d и высотой H .

2. Словесное описание. Такую форму имеют многие бытовые алгоритмы, часто используемые в повседневной жизни. Шаги алгоритма пронумерованы и содержат конкретные действия, формулируемые в виде предложений разговорного языка и математики и выполняемые последовательно в порядке увеличения номера. Однако словесное описание алгоритма на любом естественном языке обладает обычно такими недостатками как возможность неоднозначного понимания предписаний и утверждений; громоздкость, обусловленная избыточностью разговорных языков; отсутствие наглядности логических связей между частями алгоритма.

3. Алгоритмический язык. При таком описании используются определенные структуры алгоритмов и жесткие конструкции их написания.

4. Графическое описание. Это представление алгоритма в виде блок-схемы.

Схема алгоритма - это наглядный графический способ его представления. При этом отдельные предписания изображаются в виде плоских геометрических фигур, называемых блоками (Рис. 54). Внутри каждой фигуры дается описание предписываемых действий. При этом используются символы математических операций и операций отношения.

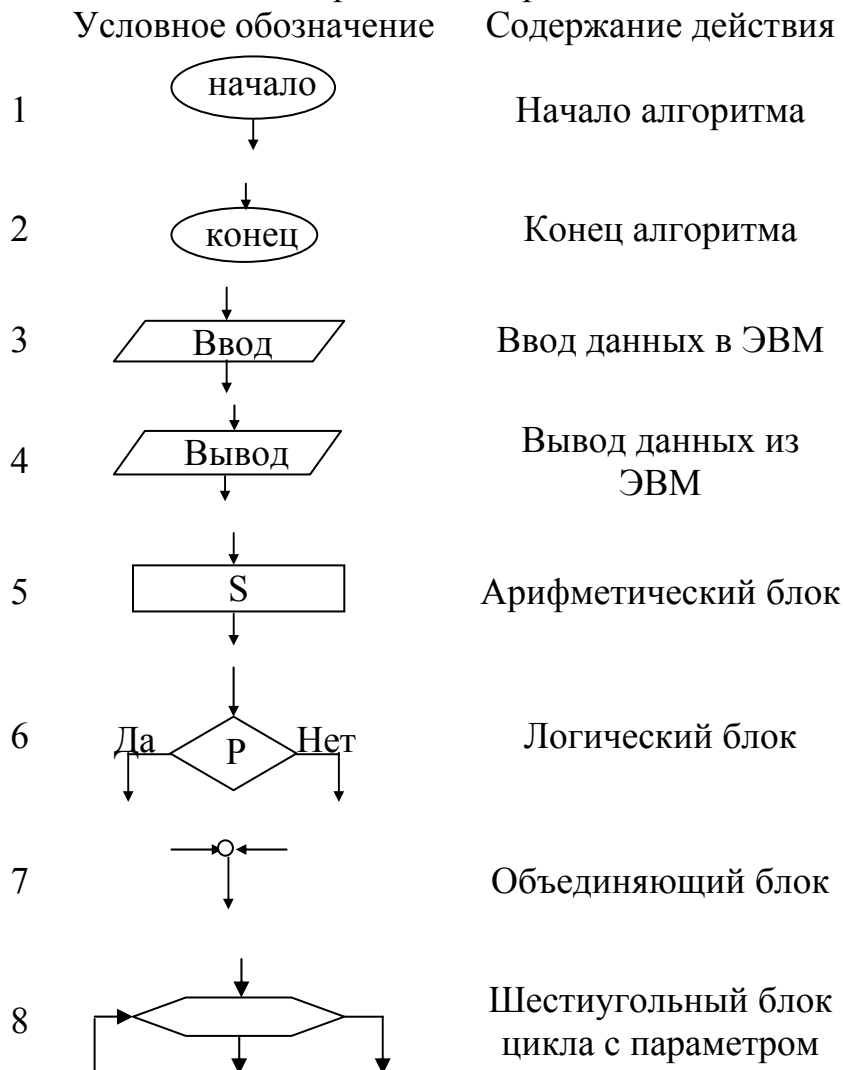


Рис. 54

Переход от одного предписания к другому изображается в виде линии связи, а направление переходов - стрелкой. Блок-схему рисуют сверху-вниз блок за блоком. Линиями соединения отдельных блоков показывают направление процесса обработки в схеме. Каждое направление называется ветвью.

п.2. Типы алгоритмов.

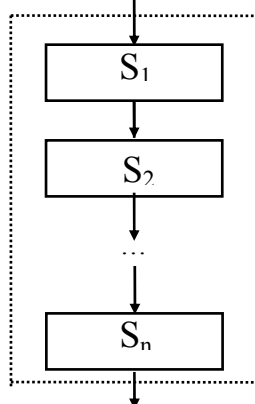
Опыт практической алгоритмизации накопленный в связи с составлением программ для ЭВМ привел к формированию особенной методики структурированной организации алгоритмов, использование которой позволяет:

1. уменьшить вероятность ошибок при разработке алгоритмов решения задач;
2. упростить понимание алгоритмов;
3. модифицировать алгоритм без существенной перестройки всей его структуры.

Эту методику называют структурным подходом. При структурном подходе к конструированию алгоритмов, они как бы собираются из 6 основных базовых структур: следование, развилка полная, развилка неполная, цикл - до, цикл - пока, цикл с параметром.

Следование

Структура состоит из 2х или более функциональных (арифметических) блоков, изображенных в виде прямоугольников (Рис. 55).



S_1, S_2 и S_n - предписываемые действия.

Словесная запись данной структуры следующая:
исполнить $S_1, S_2, \dots, S_n$

Рис. 55

Развилка

Данная структура организует выполнение одного из 2х указанных действий S_1 и S_2 в зависимости от выполнения условия P (Рис. 56). Различают полную и неполную развилки.

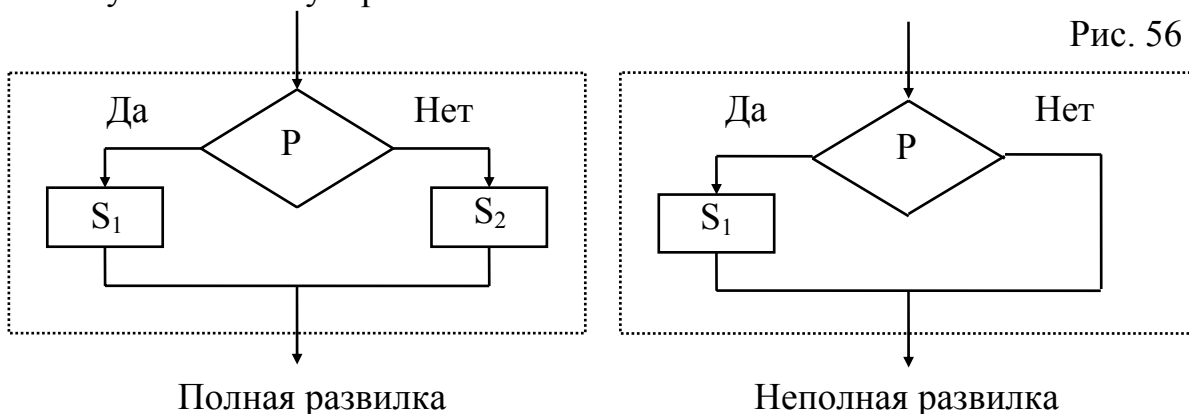


Рис. 56

Полная развилка

Неполная развилка

Словесная запись полной развилки: если P истинно, то исполнить $S1$, иначе исполнить $S2$. (или в сокращенной форме: если P , то $S1$, иначе $S2$).
Словесная запись неполной развилки: если P , то $S1$ (альтернативное действие $S2$ отсутствует)

Цикл

Данная структура описывает циклические, т.е. многократно повторяющиеся действия. Структура повторения может быть 3 типов:

Цикл – пока (Рис. 57)

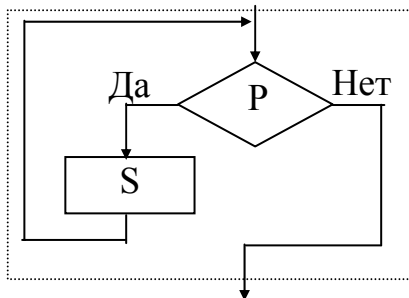


Рис. 57

Здесь P – условие продолжения цикла, S – тело цикла.

Словесная запись структуры цикла-пока: пока P истинно исполнять S

Выполнение цикла-пока начинается с проверки условия, поэтому этот цикл называют циклом с предусловием. Переход к выполнению тела цикла осуществляется только в том случае, если условие P выполняется, т.е. истинно, в противном случае, происходит выход из цикла, поэтому данный цикл называют также циклом с предусловием.

Цикл – до (Рис. 58)

Здесь P – условие окончания цикла, S – тело цикла. Словесная запись структуры цикла-до: исполнять S до истинности P

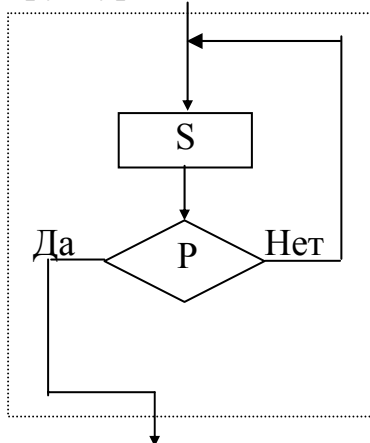


Рис. 58

Выполнение структуры цикл-до начинается с выполнения действия S . Т.о., тело цикла будет обязательно исполнено хотя бы 1 раз. После этого происходит проверка условия P , поэтому данный цикл называют также циклом с постусловием. Если условие P - ложно, то осуществляется переход к повторному выполнению тела цикла S . Когда же условие P становится истинным, то происходит выход из цикла.

Т.о., условия P в вариантах цикла-пока и цикла-до противоположны. В цикле-пока P - условие продолжения цикла, а в цикле-до P - условие окончания цикла.

Цикл с параметром (Рис. 59)

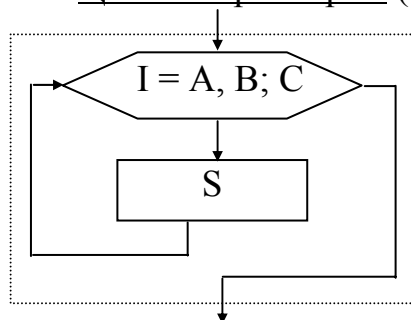


Рис. 59

Однако в теории циклических алгоритмов существует еще одна форма записи управляющей структуры цикл - цикл с параметром (или цикл со счетчиком).

Здесь I – параметр цикла, S – тело цикла. Параметр I изменяется от A до B с шагом C .

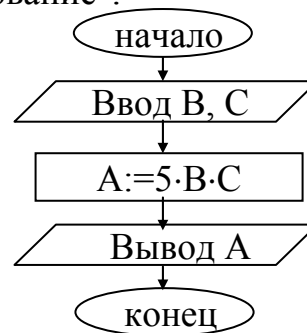
Эта форма используется в том случае, если повторяемое действие S выполняется при каждом значении некоторого параметра I (параметра цикла), изменяющегося в известных пределах с заданным шагом. При этом с самого начала известно число повторений цикла. Словесная запись цикла с параметром: для каждого значения параметра I, изменяющегося от A до B с шагом C, выполнять тело цикла S .

п.3 Базовые алгоритмические структуры

Существует три типа алгоритма: линейный алгоритм, разветвляющийся алгоритм, циклический алгоритм. Строятся алгоритмы на основе базовых алгоритмических структур.

1. *Линейный алгоритм* - это алгоритм, который не содержит логических условий и имеет только 1 ветвь вычислений. Изображается линейный алгоритм с помощью базовой структуры "следование".

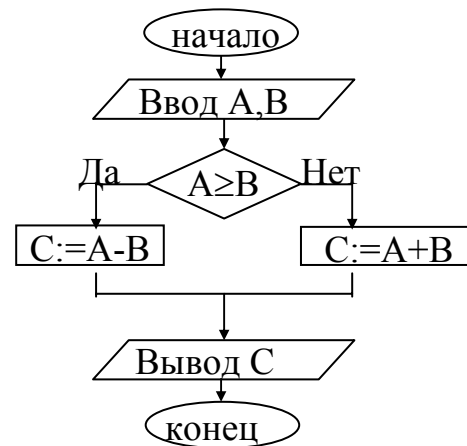
Пример 11.3.1 составить блок-схему алгоритма для вычисления $A=5 \cdot B \cdot C$ для заданных значений B и C.



2. *Разветвляющийся алгоритм* - это алгоритм, который содержит одно или несколько логических условий и имеет 2 ветви вычислений. Изображается разветвляющийся алгоритм с помощью базовой структуры "развилка".

Пример 11.3.2 составить блок-схему алгоритма вычисления

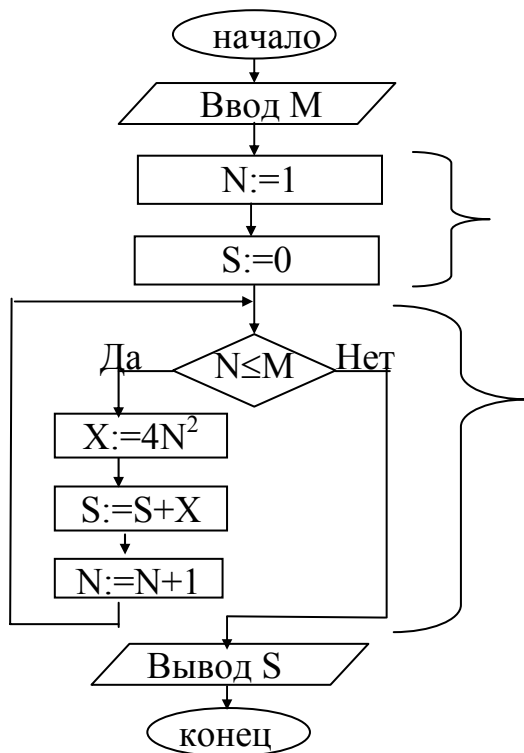
$$C = \begin{cases} A - B, & \text{если } A \geq B \\ A + B, & \text{если } A < B \end{cases}$$



3. *Циклический алгоритм* - это алгоритм, содержащий многократно повторяющиеся действия. Этот алгоритм изображается с помощью базовых структур цикл-"пока", цикл-"до", цикл с параметром.

Пример 11.3.3 составить блок-схему алгоритма для нахождения суммы первых m элементов последовательности, задаваемой формулой $x_n = 4 \cdot n^2$

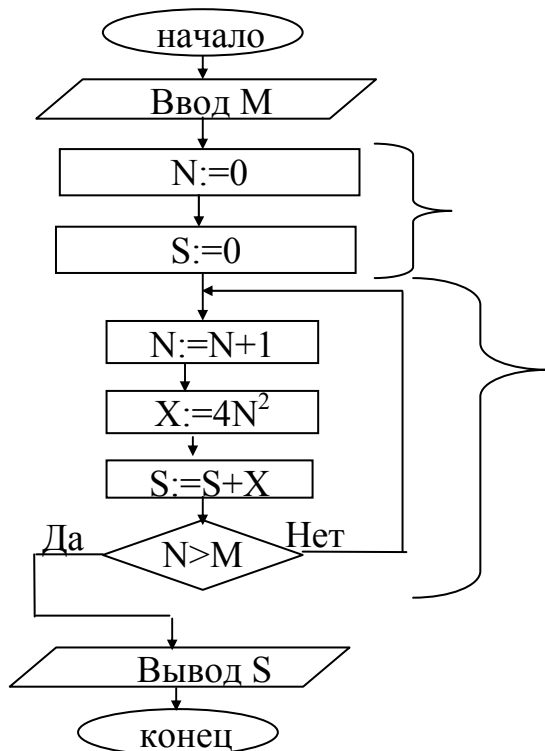
Цикл – "пока"



Начальные ус-
тановки цикла

Цикл-“пока”
Здесь блок $N \leq M$ (геометрическая фигура – ромб) является условием продолжения цикла; арифметические блоки (геометрические фигуры прямоугольники): $X := 4N^2$, $S := S + X$, $N := N + 1$ – тело цикла.

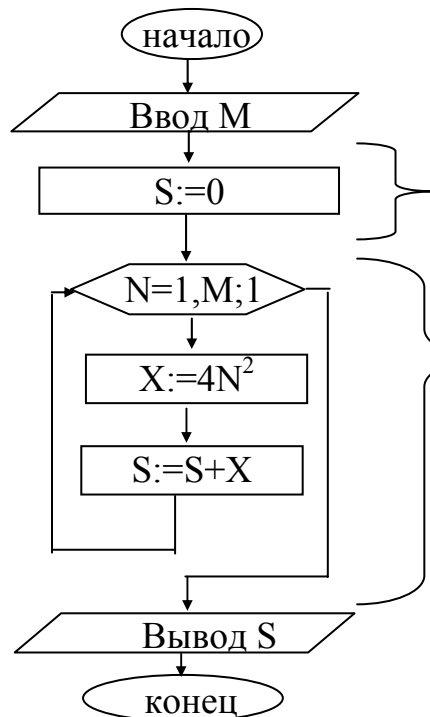
Цикл – “до”.



Начальные ус-
тановки цикла

Цикл-“до”
Здесь блок $N \leq M$ (геометрическая фигура – ромб) является условием окончания цикла; арифметические блоки (геометрические фигуры прямоугольники): $X := 4N^2$, $S := S + X$, $N := N + 1$ – тело цикла.

Цикл с параметром



Начальная установка цикла

Цикл с параметром

Здесь блок $N = 1, M; 1$

(геометрическая фигура – шестиугольник) определяет в каких пределах и с каким шагом изменяется параметр N ; арифметические блоки (геометрические фигуры прямоугольники): $X:=4N^2$, $S:=S+X$ – тело цикла.

п.4.Основные этапы решения задач на ЭВМ.

Решение задач с использованием ЭВМ требует специальной предварительной и соответственно трудоемкой работы. Ведь сам компьютер, каким бы мощным и многофункциональным он не казался, всего лишь выполняет ту последовательность действий и операций, которая предусмотрена программой, написанной самим человеком. То есть компьютер – лишь средство, позволяющее многократно, быстро и вариативно выполнять то, что ранее было проделано, продумано, разработано, опробовано, и только затем запрограммировано для выполнения машиной.

Т.о. в подготовке к решению задачи на ЭВМ можно выделить несколько этапов.

1. Постановка задачи. При этом следует четко определить, что имеется в качестве начальных данных, какие дополнительные факторы важно учесть, каким требованиям должен отвечать результат.

2. Определение метода решения. В зависимости от рода задачи может существовать несколько способов ее решения (например, найти корни квадратного уравнения можно через дискриминант, по теореме Виета и простым подбором). Поиск точных или приближенных методов решения некоторых задач может продолжаться в течение нескольких десятилетий, а их усовершенствование продолжаться на протяжении всей истории человечества. Если задача не является принципиально новой, то ее решение может быть получено с помощью некой комбинации общеизвестных

приемов, которая должна быть определена и продумана самим человеком и выбрана в качестве искомого метода решения.

3. Составление алгоритма. Под этим понимается точное изложение последовательности действий над исходными данными, выполнение которой обеспечивает получение искомого результата. Форма записи алгоритма может быть разной. Она зависит от типа задачи и ориентирована на исполнителя.

4. Написание программы для ЭВМ. Чтобы указанную последовательность действий можно было реализовать на ЭВМ, ее необходимо выразить на языке, понятном компьютеру. Для этого требуется записать выбранный алгоритм в виде последовательности соответствующих машинных кодов (т.е. на языке очень низкого уровня). Более удобными и доступными для этой цели являются языки программирования высокого уровня (Паскаль, Бейсик и др.). С их помощью можно писать самые разные по уровню сложности и по возможностям программы, поместив которые в оперативную память компьютера, легко получить необходимые результаты.

5. Апробирование и запуск программы, получение результатов. После того как программа внесена в компьютер, ее запускают. По ходу работы могут обнаружиться какие-то недостатки, ошибки, недоработки, которые устраняются программистом. Далее для контроля правильности решения поставленной задачи с помощью готовой программы используют контрольный набор данных, для которых решение и результаты ранее известны или очевидны. В случае совпадения их с результатами, выданными на ЭВМ, написанную для исходной задачи программу можно использовать для решения целого класса однотипных задач с различными наборами данных.

п.5. Алфавит языка Бейсик. Основные математические функции языка Бейсик. Основные операторы языка Бейсик.

Алфавит языка Бейсик

Существует несколько десятков версий языка программирования Бейсик. Он предназначен для начального обучения программированию и позволяет составлять программы для математических расчетов и построения графиков, организации несложных экспериментов, написания обучающих программ и диалоговых справочников и др. С его помощью можно решать определенный круг задач в диалоге «человек – ЭВМ».

Алфавит данного языка состоит из набора символов, воспринимаемых ЭВМ. Среди них можно выделить на несколько групп:

- 1) прописные латинские буквы: A, B, C, ..., X, E, Z;
- 2) цифры: 0, 1, 2, ..., 9;
- 3) знаки арифметических операций: «+» - сложение, «-» - вычитание, «*» - умножение, «/» - деление, «^» - возведение в степень;
- 4) знаки отношений: =, >=, >, <=, <, <> (не равно);
- 5) специальные символы: . ; ! ? " ' () \$ # % и др.

Используются целые и действительные числа. В десятичной записи числа целая часть отделяется от дробной части точкой. Запись «2.34E-6» соответствует числу $2,34 \cdot 10^{-6}$, т.е. символ E указывает порядок числа.

Переменные бывают: вещественные и литерные. Вещественные переменные обозначаются прописными буквами латинского алфавита (A, B, C, D, ..., X, E, Z) или сочетанием буквы и цифры (A1, A2, B3, ...). Имя литерной переменной должно заканчиваться символом \$ (A\$, C\$, ...).

Числовые выражения записываются в строчку с использованием соответствующих символов арифметических операций и круглых скобок. Действия выполняются в следующем порядке: действие в скобках, возведение в степень, умножение и деление, сложение и вычитание (операции одного приоритета выполняются слева направо).

Основные математические функции языка Бейсик

В состав арифметических выражений могут входить стандартные функции языка Бэйсик:

SIN(X) – синус аргумента x ;

COS(X) – косинус аргумента x ;

TAN(X) – тангенс аргумента x ;

ATN(X) – арктангенс числа x ;

ABS(X) – модуль числа x ;

SQR(X) – синус аргумента x ;

LOG(X) – натуральный логарифм числа x ;

EXP(X) – показательная функция (число $e \approx 2.71828$ в степени x);

FN Y(X) – функция пользователя x .

Основные операторы языка Бейсик.

Операторы	Выполняемые действия
CLS	очищает экран
END	завершает программу
FOR счетчик = начало ТО конец [STEP приращение] [блок операторов] NEXT [счетчик]	повторяет блок операторов указанное число раз. Здесь счетчик – числовая переменная
GOTO строка	выполняет переход в указанную строку
IF (условие) THEN (действие 1) ELSE (действие 2)	выполняет блок операторов в зависимости от указанных условий
INPUT список переменных	считывает входные данные с клавиатуры
[LET] переменная = выражение	присваивает значение выражения переменной
PRINT выражения	выводит данные на экран. Выражения – одно или несколько числовых или символьных выражений для печати
REM комментарий	позволяет вставлять комментарии в программы

п.6. Методика составления программ на языке программирования Бейсик

Программа на Бэйсике представляет собой последовательность строк, каждая строка снабжается десятичным номером. Выполнение программы осуществляется в порядке возрастания номеров. Причем последовательность номеров строк не обязательно должна состоять из следующих друг за другом натуральных чисел. Для того, чтобы облегчить в процессе составления программы вставку новых строк между уже имеющимися, строки программы обычно нумеруются с шагом в 10 номеров. Каждая строка содержит один или несколько операторов.

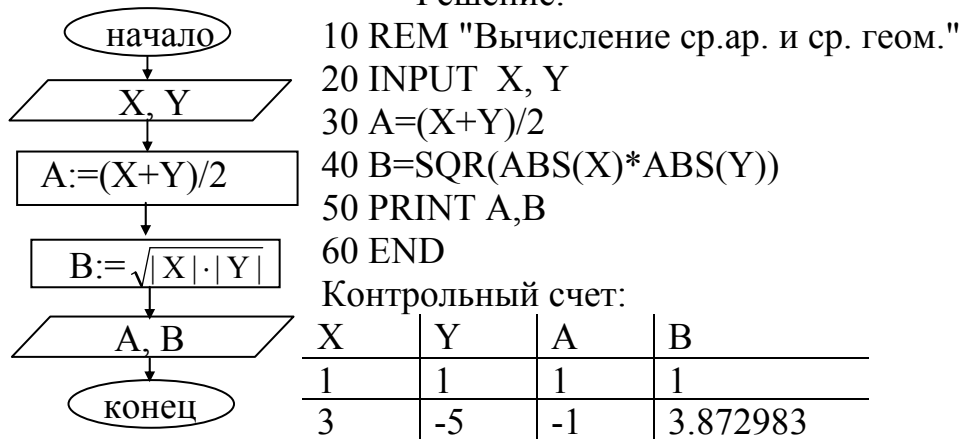
Программы могут быть линейными (когда каждый оператор в указанной последовательности выполняется ровно один раз), разветвленные (когда выполнение одной из нескольких групп операторов зависит от соблюдения некоторого условия), циклических (когда какой-то блок операторов выполняется многократно).

1. Линейные программы.

Начинать составление программы рекомендуется с составления блок-схемы алгоритма. А написание программы сводится к замене блока алгоритма соответствующими операторами.

Пример 11.6.1 Даны 2 действительных числа. Требуется вычислить в программируемом режиме среднее арифметическое этих чисел и среднее геометрическое их модулей.

Решение:



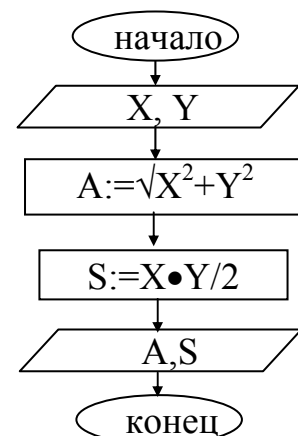
Пример 11.6.2 Даны катеты прямоугольного треугольника. Найти гипотенузу и площадь.

```

10 REM "Вычисление гипот. и площади"
20 INPUT "Введите значения катетов:";X,Y
30 A=SQR(X^2+Y^2)
40 S=X*Y/2
50 PRINT "Гипотенуза=";A;"Площадь=";S
60 END
  
```

Контрольный счет:

X	Y	A	S
400	500	640.3124	100000
321	654	728.5307	104967

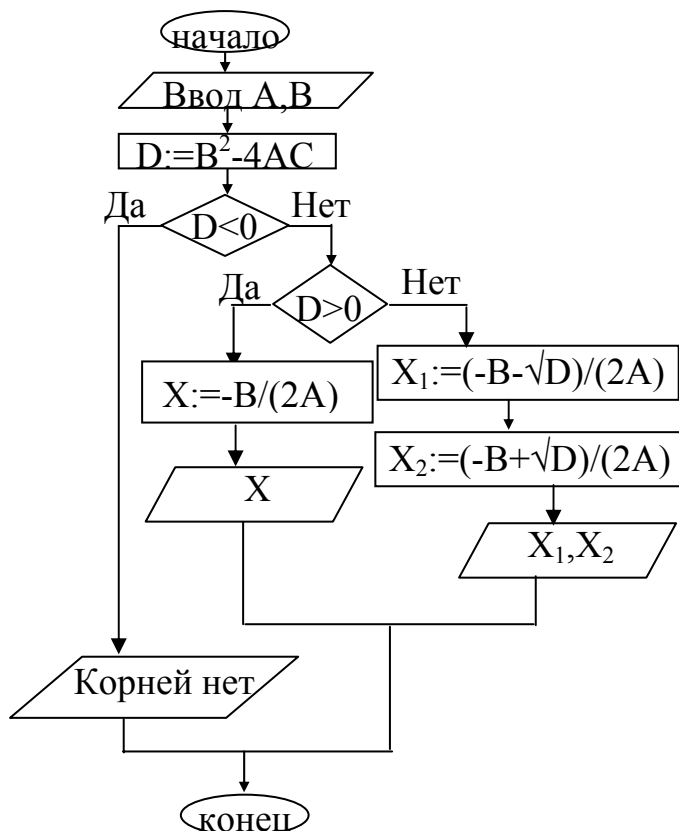


2. Разветвляющиеся программы.

Для реализации логического блока используется оператор условного перехода. Он изменяет ход выполнения программы в зависимости от результата проверки условия. Эта управляющая конструкция называется развилка. На Бейсике развилка выражается с помощью оператора:

IF выражение THEN операторы ELSE операторы

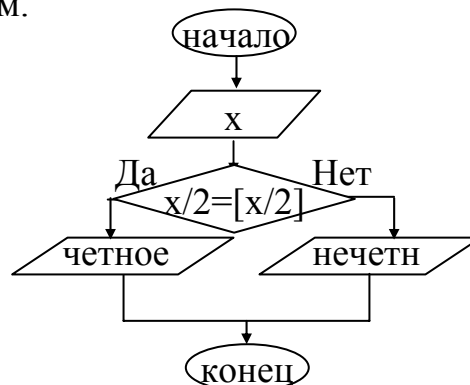
Пример 11.6.3 Вычислить действительные корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ при произвольных значениях коэффициентов a, b, c и условии $a \neq 0$.



```

10 REM "Вычисление корней"
20 INPUT A,B,C
30 D=B^2-4*A*C
40 IF D<0 THEN 50 ELSE 70
50 PRINT "Корней нет"
60 GOTO 140
70 IF D>0 THEN 80 ELSE 110
80 X=-B/(2*A)
90 PRINT X
100 GOTO 140
110 X1=(-B-SQR(D))/(2*A)
120 X2=(-B+SQR(D))/(2*A)
130 PRINT X1,X2
140 END
  
```

Пример 11.6.4 Определить, является ли данное целое число четным.



```

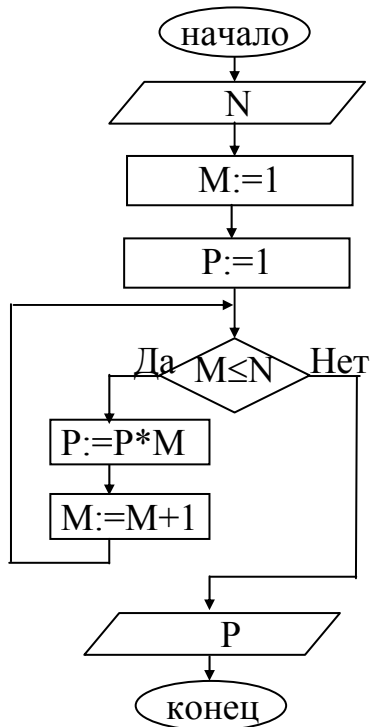
10 REM"ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧЕТНОСТИ"
20 INPUT X
30 IF X / 2 = INT(X / 2) THEN 30 ELSE 60
40 PRINT "ЧЕТНОЕ"
50 GOTO 70
60 PRINT "НЕЧЕТНОЕ"
70 END
  
```

3. Циклические программы

Циклы с произвольным числом повторений реализуются с помощью базовых алгоритмических структур цикл-“пока”, цикл-“до”, цикл с параметром

Цикл-“пока” реализуется на Бейсике с помощью операторов IF ... THEN...ELSE и GOTO...

Пример 11.6.5 Дано натуральное число n . Вычислить $n!$.



```

10 REM "вычисление факториала"
20 INPUT N
30 M = 1
40 P = 1
50 IF M <= N THEN 60 ELSE 90
60 P = P * M
70 M = M + 1
80 GOTO 50
90 PRINT P
100 END
  
```

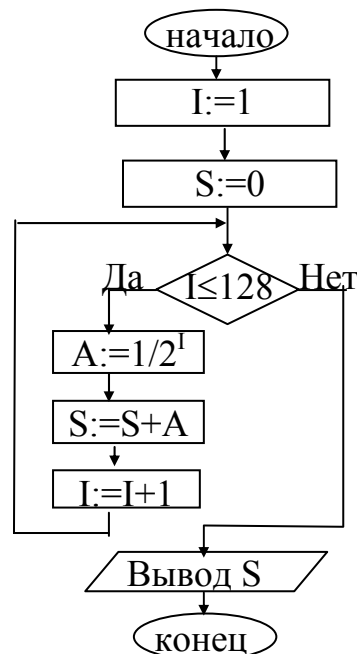
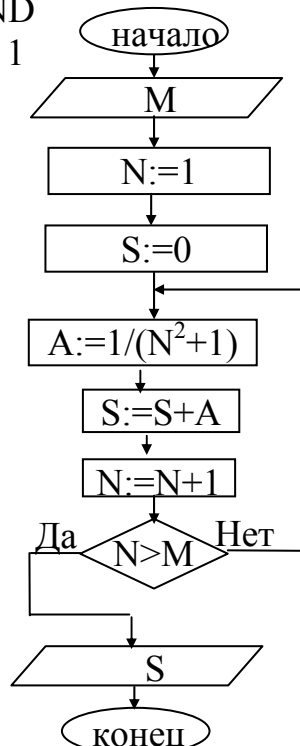
Контрольный счет:
при n=5 n!=120

Пример 11.6.6 Вычислить $\sum_{i=1}^{128} \frac{1}{2^i}$

```

10 REM "Вычисление суммы"
20 I = 1
30 S = 0
40 IF I <= 128 THEN 50 ELSE 90
50 A = 1 / 2 ^ I
60 S = S + A
70 I = I + 1
80 GOTO 40
90 PRINT S
100 END
  
```

Ответ: 1



Цикл-“до” реализуется на Бейсике с помощью оператора IF ... THEN...ELSE

Пример 11.6.7 Задана последовательность $a_n = \frac{1}{n^2 + 1}$. Найти сумму m первых членов последовательности.

```

10 REM "НАХОЖДЕНИЕ СУММЫ"
20 INPUT M
30 N = 1
40 S = 0
50 A = 1 / (N ^ 2 + 1)
60 S = S + A
70 N = N + 1
80 IF N > M THEN 90 ELSE 50
  
```

```

90 PRINT S
100 END

```

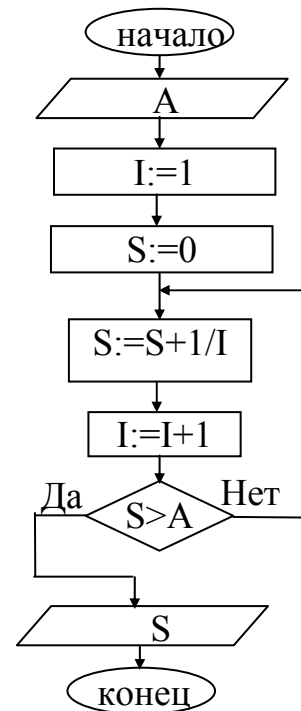
Контрольный счет:
 $m=13$ $S=1.002768$;
 $m=45$ $S=1.0547$

Пример 11.6.8 Дано действительное число a .
 Найти среди чисел 1 , $1 + \frac{1}{2}$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ и т.д. пер-
 вое большее a .

```

10 REM "НАХОЖДЕНИЕ ЭЛЕМЕНТА"
20 INPUT A
30 I = 1
40 S = 0
50 S = S + 1/I
60 I = I + 1
70 IF S > A THEN 80 ELSE 50
80 PRINT S
90 END

```



Цикл с параметром реализуется с помощью операторов цикла со счетчиком:

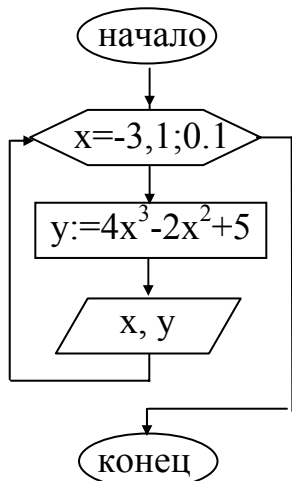
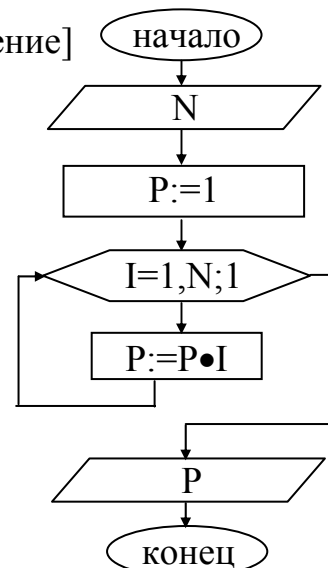
FOR счетчик = начало TO конец [STEP приращение]
 блок операторов
 NEXT счетчик

Пример 11.6.9 Вычислить (для данного n) $n!$.

```

10 REM "Вычисление факториала"
20 INPUT N
30 P = 1
40 FOR I = 1 TO N
50 P = P * I
60 NEXT I
70 PRINT P
80 END

```



Пример 11.6.10 Вычислить значение функции $y=4x^3-2x^2+5$ для значений x , изменяющихся от -3 до 1 с шагом $0,1$.

```

10 REM "Вычисл. значения функции"
20 FOR X = -3 TO 1 STEP .1
30 Y = Y * X ^ 3 - 2 * X ^ 2 + 5
40 PRINT Y
50 NEXT X
60 END

```

Э. Дийкстр (известный математик) в своей структурной теореме сказал: "Алгоритм любой сложности можно реализовать, используя триаду "следование" - "повторение (циклы)" - "выбор (развилки)".

Пример 11.6.11 Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя (НОД) неотрицательных целых чисел основан на следующих свойствах этой величины. Пусть m и n одновременно не равные нулю целые неотрицательные числа и пусть $m \geq n$. Тогда, если $n=0$, то $\text{НОД}(n,m)=m$, а если $n \neq 0$, то для чисел m , n и r , где r - остаток от деления m на n , выполняется равенство $\text{НОД}(m,n)=\text{НОД}(n,r)$. Например, $\text{НОД}(15,6) = \text{НОД}(6,3) = \text{НОД}(3,0) = 3$

$\text{НОД}(24,8) = \text{НОД}(8,16) = \text{НОД}(8,8) = 8$

$\text{НОД}(56,24) = \text{НОД}(24,32) = \text{НОД}(24,8) = \text{НОД}(8,16) = \text{НОД}(8,8) = 8$

Даны натуральные числа n , m . Используя алгоритм Евклида, найти наибольший общий делитель n и m .

10 REM "Алгоритм Евклида"

20 INPUT M, N

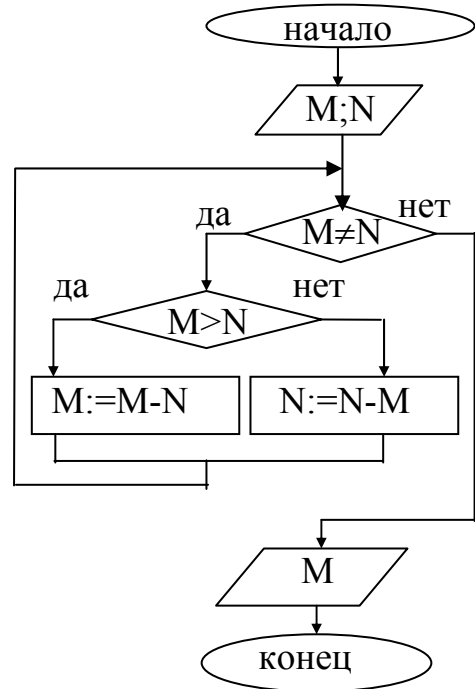
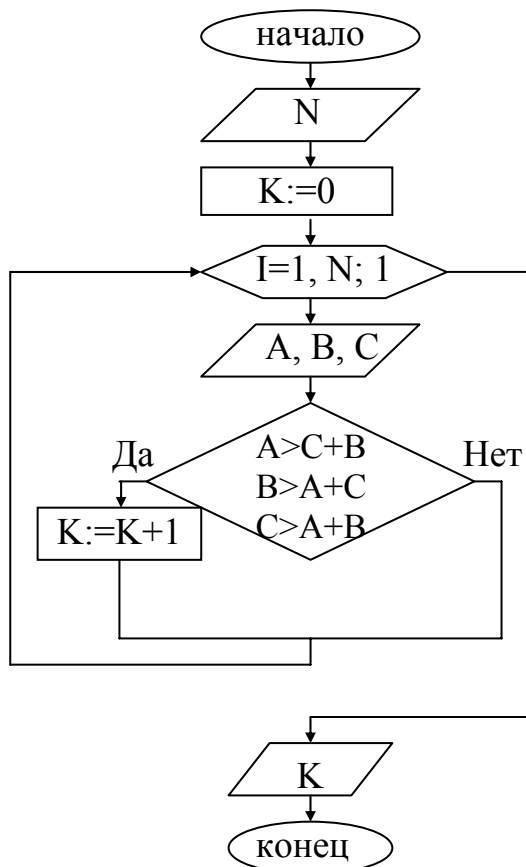
30 IF M < N THEN 40 ELSE 60

40 IF M > N THEN M = M - N ELSE N = N - M

50 GOTO 30

60 PRINT "НОД="; M

70 END



Пример 11.6.12 Задано n троек чисел a , b , c . Определить, сколько из предложенных троек можно использовать для построения треугольника, если a , b , c – длины его сторон.

10 REM "Треугольник"

20 INPUT N

30 FOR I=1 TO N

40 INPUT "A="; A

50 INPUT "B="; B

60 INPUT "C="; C

70 IF A > C+B AND B > A+C AND

C > A+B THEN K=K+1

80 NEXT I

90 PRINT "Пригодно троек"; K

100 END

Задачи для самостоятельной работы

1. Дана длина ребра куба. Найти объем куба и площадь его боковой поверхности.
2. Определить силу притяжения F между телами массы m_1 и m_2 , находящимися на расстоянии r друг от друга. ($F = -G \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2$, где $G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{сек}^2)$ – гравитационная постоянная)
3. Даны действительные числа x, y, z . Вычислить:

$$\text{а) } a = \ln \left(y - \sqrt{|x|} \left(x - \frac{y}{z + \frac{x^2}{4}} \right) \right) \quad \text{б) } b = y + \frac{x}{y^2 + \frac{x^2}{y + \frac{x^3}{3}}}$$

4. Даны 2 действительных числа. Заменить первое число нулем, если оно больше или равно второму. И оставить числа без изменения в противном случае.
5. Даны 3 действительных числа. Возвести в квадрат те из них, значения которых неотрицательны.
6. Даны действительные числа x, y . Если x и y отрицательны, то каждое из них заменить его модулем; если отрицательно только одно из них, то оба значения увеличить на 0.5. В остальных случаях значения оставить без изменения.
7. Дано действительное число h . Выяснить, имеет ли уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ действительные корни, если

$$a = \sqrt{\frac{|\sin 8h| + 17}{1 - \sin 4h(\cos(h^2 + 18))^2}}, \quad b = 1 - \sqrt{\frac{3}{3 + |\operatorname{tg} ah^2 - \sin ah|}},$$

$$c = ah^2 \sin bh + 8h^3 \cos ah$$

Если действительные корни существуют, то найти их. В противном случае ответом должно служить сообщение, что действительных корней нет.

8. Дан ряд $a_k = \frac{k}{k^2 + 1}$. Найти сумму всех членов ряда не меньших числа ε .
9. Вычислить $(1 + \sin 0.1)(1 + \sin 0.2) \dots (1 + \sin 10)$.
10. Вычислите сумму квадратов нечетных чисел последовательности от 11 до 99.
11. Вывести на печать числа, обратные квадратам первых ста натуральных чисел, и посчитать их произведение.
12. Составить блок-схему и программу вычисления суммы $\sum_{n=1}^{50} \frac{n+1}{n}$.

Приложение 1. Государственный стандарт для дисциплины “Математика и информатика” по гуманитарным специальностям

Аксиоматический метод; основные математические структуры; вероятность и статистика; математические модели; алгоритмы и языки программирования; стандартное программное обеспечение профессиональной деятельности.

Приложение 2. Рабочая программа по дисциплине “математика и информатика”

специальность: 032900 “Русский язык и литература”

квалификация: учитель русского языка и литературы

форма обучения: очная

факультет: филологический

кафедра: вычислительной математики и информатики

курс: 1 (для 5-летнего срока обучения) семестр: 2

лекций: 17 ч, практических занятий: 34 ч, самостоятельная работа: 49 ч

Всего часов: 100 ч

зачет: 2 семестр

I. Организационно-методический раздел.

1.1 Пояснительная записка

В современном мире роль математики существенно возросла. Трудно представить себе какую-нибудь отрасль хозяйства, область науки без этой дисциплины. Даже в социальную сферу математика ворвалась математической статистикой, теорией вероятностей и т. д.

Также невозможно представить себе жизнь без компьютеров. Уже давно избавились от неверного мнения, что компьютеры нужны только математикам. О многом уже говорит одно только название – персональный компьютер: здесь и почти мгновенная связь с другими пользователями, и высокая скорость обработки данных, и огромная память, не говоря уже о печати текстов в различных шрифтах и т.д.

Поэтому курс “Математика и информатика” призван ознакомить студентов с некоторыми разделами высшей математики, углубить знания, полученные в школе по информатике и информационным технологиям, дать необходимые сведения о современных аспектах использования ЭВМ и последних достижениях.

Таким образом, цель настоящего курса – углубить знания студентов по математике и информатике. Ознакомить их с необходимыми сведениями о функционировании ЭВМ, возможностях применения и последних достижениях в этой области, научить пользоваться необходимыми прикладными программами (текстовым редактором, графическим редактором), научить составлять алгоритмы и программы для решения простейших задач.

1.2 Требования к уровню освоения содержания дисциплины:

- 1) **Зачтено** – полное посещение лекционных и практических занятий, оценка отлично по итогам контрольных и самостоятельных работ, не менее трех ответов на практических занятиях, полный ответ на зачете.
- 2) **Незачтено** – неполное посещение лекционных и практических заня-

тий, оценки неудовлетворительно по итогам контрольных и самостоятельных работ, неудовлетворительный ответ на зачете.

II. Содержание дисциплины.

2.1 Основные разделы дисциплины.

1. Математика:
 - 1) Алгебра.
 - 2) Комбинаторика.
 - 3) Теория вероятности и математическая статистика.
 - 4) Аналитическая геометрия.
 - 5) Математический анализ.
2. Информатика и информационные технологии:
 - 1) Теоретические основы информатики.
 - 2) Программное обеспечение ЭВМ.
 - 3) Языки и методы программирования.

2.2 Темы и их содержание.

1. Аксиоматический метод. Математические доказательства.

Аксиоматический метод построения математических теорий. Математические доказательства. Метод математической индукции

2. Элементы множества, отношения, отображения.

Понятие множества. Подмножества. Способы задания множеств. Равные множества. Дополнения к подмножеству. Диаграммы Эйлера–Венна. Операции над множествами (пересечение, объединение, разность множеств). Соответствия, бинарные соответствия. Отношения. Отображения (отображения “в”, инъективные, сюръективные, взаимно-однозначные).

3. Комбинаторика.

Декартово произведение двух множеств. Кортежи и множества. Правило суммы для пересекающихся и непересекающихся множеств. Правило произведения. Размещения, перестановки, сочетания с повторениями и без. Свойства чисел C_m^n .

4. Элементы теории вероятностей и мат. статистика.

События, виды событий. Сумма и произведение событий. Классическое и статистическое определение вероятности. Свойства вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности формула Байеса. Формула Бернулли.

5. Элементы векторной алгебры.

Скалярные и векторные величины. Определение вектора. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами.

6. Элементы аналитической геометрии.

Системы координат. Преобразование координат на плоскости. Расстояние между точками на плоскости. Координаты середины отрезка. Прямые линии, уравнение прямой, ее свойства, условие параллель-

ности и перпендикулярности прямых линий, угол между двумя прямыми, общее уравнение прямой.

7. Основы математического анализа.

Функции и последовательности. Предел последовательности, предел функции. Дифференциал функции. Производная. Формулы дифференцирования. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл.

8. Информация и информационные процессы.

Понятие об информации. Носители информации. Количественная мера информации. Кодирование информации, системы счисления. Двоичный, восьмеричный, шестнадцатеричный алфавиты. Информационные процессы в природе и обществе. Информационная деятельность человека.

9. Архитектура ЭВМ. Программное обеспечение ЭВМ.

Этапы развития вычислительной техники. Поколения ЭВМ. Принцип программного управления. Персональный компьютер IBM PC: основные узлы, их назначение и характеристики, программное обеспечение. Принцип открытой архитектуры.

10. Алгоритм и его свойства. Методика составления алгоритмов.

Понятие алгоритма. Свойства алгоритмов. Способы задания алгоритмов. Типы алгоритмов. Базовые алгоритмические структуры. Основные этапы решения задач на ЭВМ.

III. Рабочая программа дисциплины.

3.1. Распределение курса по темам и видам работ.

№ п/п	Наименование тем и разделов	Всего часов	Аудиторные занятия		Самостоятельная работа
			Лекции	Практические	
1	Аксиоматический метод. Математические доказательства	5 ч.	1 ч.	2 ч.	2 ч.
2	Элементы множества, отношения, отображения	7 ч.	2 ч.	2 ч.	3 ч.
3	Комбинаторика.	5 ч.	1 ч.	2 ч.	2 ч.
4	Элементы теории вероятностей.	6 ч.	2 ч.	2 ч.	2 ч.
5	Элементы векторной алгебры.	3 ч.	1 ч.	1 ч.	2 ч.
6	Элементы аналитической геометрии.	5 ч.	1 ч.	1 ч.	2 ч.
7	Основы математического анализа.	14 ч.	2 ч.	5 ч.	7 ч.
8	Информация и инф-ные процессы.	7 ч.	1 ч.	2 ч.	4 ч.
9	Архитектура ЭВМ. Программное обеспечение ЭВМ.	25 ч.	3 ч.	10 ч.	12 ч.
10	Алгоритм и его свойства. Методика составления алгоритмов	23 ч.	3 ч.	7 ч.	13 ч.
	Итого часов:	100 ч	17 ч.	34 ч.	49 ч.

3.3 Практические занятия, их содержание и объем в часах.

1. Метод математической индукции	2 часа
2. Множества и операции над ними	1 часа
3. Соответствия, отношения, отображения	1 час
4. Комбинаторика.	2 часа
5. Элементы теории вероятностей.	2 часа
6. Элементы векторной алгебры	1 час
7. Элементы аналитической геометрии	1 часа
8. Основы математического анализа.	5 часов
9. Системы счисления	2 часа
10. Работа с системными программами: операционные системы DOS и Windows, программа-оболочка Norton Commander	4 часа
11. Работа с прикладными программами (текстовый, графический редакторы).	4 часов
12. Статистическая обработка данных на ЭВМ. Электронные таблицы. Базы данных.	2 часа
13. Компьютерное моделирование. Составление алгоритмов.	4 часа
14. Язык программирования Basic	3 часа
Всего часов:	34 часа

3.4 Формы текущего, промежуточного и итогового контроля.

1. Итоговый контроль: зачет.

Билеты состоят из двух вопросов (один теоретический и один практический).

2. Текущий и промежуточный контроль:

<i>Наименование вопросов</i>	<i>№ тем практических работ</i>	<i>Форма контроля</i>
Аксиоматический метод. Математические доказательства. Множества. Соответствия. Отношения. Отображения.	1, 2, 3	Выборочный опрос по теоретическому материалу на лабораторном занятии
Размещения, перестановки, сочетания. События. Вероятность.	4, 5	Тестирование на лабораторном занятии
Элементы векторной алгебры.	6	Самостоятельная работа на лабораторном занятии
Элементы аналитической геометрии. Кординаты. Правила суммы и произведения.	7	Выборочный опрос по теоретическому материалу на лабораторном занятии

Предел функции, предел последовательности. Производная. Интеграл.	8	Контрольная работа
Информация. Кодирование информации.	9	Выборочный опрос по теоретическому материалу на лаб. занятии
Системы счисления. Информационные процессы. Поколения ЭВМ.	9	Самостоятельная работа на лабораторном занятии
Основные узлы IBM PC, их назначение и характеристика. Современное программное обеспечение.	10, 11, 12	Выборочный опрос по теоретическому материалу на лабораторном занятии
Алгоритм, его свойства. Основные этапы решения задач на ЭВМ.	13, 14	Контрольная работа

III. Учебно-методическое обеспечение дисциплины:

4.1. Типовые контрольные работы, задания для самостоятельной работы

Контрольная работа № 1.

1. Найти область определения функции.

1 вариант $f(x) = \frac{3 \cdot x^2}{(x+1)(x-2)}$

2 вариант $f(x) = \sqrt{x-2}$

2. Решить задачу.

1 вариант.

Сколькими способами в слове «логарифм» можно выбрать две согласные и одну гласную.

2 вариант.

Сколькими способами можно составить наряд из одного сержанта и 3 солдат, если всего 3 сержанта и 10 солдат.

3. Решить задачу.

1 вариант.

Найдите длину медианы AD в ΔABC , если $A(2,1)$, $B(1,5)$, $C(8,6)$.

2 вариант.

Дан ΔABC с вершинами $A(0,5)$, $B(-5,3)$, $C(4,-5)$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон AB и AC.

4. Угол между векторами a и b равен 120° , $|a|=3$, $|b|=2$. Найдите:

1 вариант. $(\vec{a} - \vec{b})^2$

2 вариант. $(\vec{a} + \vec{b})^2$

5. Найти предел:

1 вариант. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{4n-8}$

2 вариант. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-n}{2n+1}$

Контрольная работа № 2.

1. Перевести из одной системы счисления в другую:

1 вариант.

$36_{10} \rightarrow ()_2$

2 вариант.

$37_{10} \rightarrow ()_2$

$$101101_2 \rightarrow ()_{10} \quad 100110_2 \rightarrow ()_{10}$$

2. Составить схему алгоритма решения следующей задачи:

1 вариант:

$$y = \begin{cases} -1 - z^2 & \text{если } z \leq 0 \\ z^2 - 1 & \text{если } 0 < z \leq 2 \\ 5z & \text{если } z > 2 \end{cases}$$

2 вариант:

$$y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{если } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{если } 0 \leq x \leq 1 \\ 4x - 1 & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

3. Составить алгоритм и разработать программу на языке Бейсике:

1 вариант: $\sum_{k=1}^5 \frac{(-1)^k}{k+2}$

2 вариант: $\sum_{k=0}^6 \frac{1}{4^k + 2}$

Самостоятельная работа № 1.

1. Даны множества

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$C = \{-4, -3, 3, 4\}$$

Найти:

1 вариант. $(A \cup B) \cap C$

2 вариант. $(A \cap B) \cup C$

2. Элементы множеств X и Y находятся в отношении $y = x - 3$. Постройте график данного отношения, если

1 вариант. $X = [-2, 2], Y = \mathbf{R}$

2 вариант. $X = [0, 3], Y = \mathbf{R}$

3. Решите задачу.

1 вариант.

В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. В каком случае имеется большая свобода выбора: если до этого уже взято яблоко или взят апельсин.

2 вариант.

На вершину горы ведет 5 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее.

4. Докажите методом математической индукции:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2 \quad (k \in \mathbf{N})$$

Самостоятельная работа № 2.

1. Перевести из одной системы счисления в другую:

1 вариант.

$$85_{10} \rightarrow ()_2$$

$$100110_2 \rightarrow ()_{10}$$

$$85_{10} \rightarrow ()_{16}$$

$$85_{10} \rightarrow ()_8$$

2 вариант.

$$125_{10} \rightarrow ()_2$$

$$101010_2 \rightarrow ()_{10}$$

$$58_{10} \rightarrow ()_8$$

$$58_{10} \rightarrow ()_{16}$$

2. Написать программу вычисления заданного выражения на языке Basic для произвольного значения x и заданных значений a, b, c, d :

1 вариант. $y = \frac{a(x-b)}{c+d}$

2 вариант. $y = \frac{a}{c} + d(1-b)$

4.2 Примерный перечень вопросов для самостоятельной работы

- 1 Аксиоматический метод в математике
- 2 Модели системы аксиом
- 3 Аксиоматика множества натуральных чисел
- 4 Строение теоремы

- 5 Обратная и противоположная теоремы к данной
- 6 Принцип математической индукции
- 7 Способы задания множеств через характеристическое свойство
- 8 Собственные и несобственные подмножества
- 9 Дополнение к подмножеству
- 10 Универсальное множество
- 11 Свойства операций над множествами
- 12 Типы соответствий
- 13 Операции над соответствиями
- 14 Граф бинарного отношения
- 15 Отношения эквивалентности
- 16 Отношения порядка
- 17 Обратные отображения
- 18 Эквивалентные множества
- 19 Упорядоченные множества
- 20 Составление событий в результате опыта
- 21 Определение элементарных исходов
- 22 Коллинеарные, сонаправленные и т.д. вектора
- 23 Метод координат на плоскости и в пространстве
- 24 Числовые функции
- 25 Построение графиков функций
- 26 Рекуррентные последовательности
- 27 Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности
- 28 Возрастание и убывание функции
- 29 Бесконечно малые функции
- 30 Предел функции в точке
- 31 Предел функции на бесконечности
- 32 Непрерывные функции
- 33 Свойства функций, непрерывных на отрезке
- 34 Механический смысл производной
- 35 Свойства определенных и неопределенных интегралов
- 36 Правила вычисления определенных и неопределенных интегралов
- 37 Основы информационной культуры
- 38 Переход к информационному обществу
- 39 Измерение и представление информации
- 40 Информационные системы
- 41 Информационные технологии
- 42 информационно-логические основы построения ЭВМ
- 43 Функционально-структурная организация ЭВМ
- 44 Состояние и тенденции развития ЭВМ
- 45 Офисная техника
- 46 Системное программное обеспечение компьютера
- 47 Прикладные программные продукты
- 48 Инструментарий технологии программирования
- 49 Структурное программирование

50 Объектно-ориентированное программирование

51 Составление алгоритмов и программ на Basic и Pascal

4.4 Перечень вопросов к зачету.

Теоретическая часть

1. Аксиоматический метод. Математические доказательства.
2. Метод математической индукции.
3. Понятие множества. Подмножества. Способы задания множеств. Равные множества. Дополнения к подмножеству. Диаграммы Эйлера–Венна.
4. Операции над множествами (пересечение, объединение, разность множеств).
5. Соответствия, бинарные соответствия. Отношения.
6. Отображения (отображения “в”, инъективные, сюръективные, взаимно-однозначные).
7. Комбинаторика: декартово произведение двух множеств; кортежи и множества; правило суммы для пересекающихся и непересекающихся множеств; правило произведения.
8. Комбинаторика: размещения, перестановки, сочетания с повторениями и без.
9. Элементы теории вероятностей и мат. статистика: события, виды событий; сумма и произведение событий.
10. Элементы теории вероятностей и мат. статистика: классическое и статистическое определение вероятности; свойства вероятности; теоремы сложения и умножения вероятностей.
11. Элементы теории вероятностей и мат. статистика: формула полной вероятности, формула Байеса; формула Бернулли.
12. Элементы векторной алгебры: скалярные и векторные величины; определение вектора; линейные операции над векторами; скалярное произведение векторов; угол между векторами.
13. Элементы аналитической геометрии: системы координат; преобразование координат на плоскости; расстояние между точками на плоскости; координаты середины отрезка.
14. Элементы аналитической геометрии: прямые линии, уравнение прямой, ее свойства, условие параллельности и перпендикулярности прямых линий, угол между двумя прямыми, общее уравнение прямой.
15. Основы математического анализа: функции и последовательности; предел последовательности, предел функции.
16. Основы математического анализа: дифференциал функции; производная; формулы дифференцирования.
17. Основы математического анализа: неопределенный интеграл.
18. Основы математического анализа: определенный интеграл.
19. Информация и информационные процессы: понятие об информации; носители информации; количественная мера информации.
20. Информация и информационные процессы: кодирование информации, системы счисления; двоичный, восьмеричный, шестнадцатеричный ал-

фавиты.

21. Информация и информационные процессы: информационные процессы в природе и обществе; информационная деятельность человека.
22. Понятие алгоритма; свойства алгоритмов; способы задания алгоритмов; типы алгоритмов.
23. Базовые алгоритмические структуры.
24. Основные этапы решения задач на ЭВМ.
25. Этапы развития вычислительной техники. Поколения ЭВМ.
26. Архитектура ЭВМ: принцип программного управления.
27. Архитектура ЭВМ: принцип открытой архитектуры; персональный компьютер IBM PC: основные узлы, их назначение и характеристики
28. Программное обеспечение ЭВМ.

Типовые практические задания

1. Доказать формулу: $1+2+2^2+2^3+\dots+2^{n-1} = 2^n - 1$
2. Доказать формулу: $(4^n + 15n - 1) : 9$
3. Доказать формулу: $n(2n^2 - 3n + 1) : 6$
4. Записать множества A, B, C перечислением их элементов и найти $A \cup B$, $B \cap C$, $(A \cup B) \cap C$, $A \cup B \cap C$, $A \cap B \cap C$, $(A \setminus B) \cap C$, $(A \cup C) \setminus (C \cap B)$, если A – множество делителей числа 12, B – множество корней уравнения $x^2 - 6x + 5 = 0$, C – множество нечетных чисел x таких, что $3 \leq x \leq 12$.
5. Даны множества: $A = [-5, 1]$, $B = (0, 4]$, $C = (-7, 0]$, $D = [-3, 0]$, $K = \{1, 3, 5, 7\}$. Найти следующие множества $A \setminus B$, $B \cup C$, $C \setminus D$, $B \setminus K$, $K \setminus D$, $B \cup C \cap D$, $B \cup K \setminus A$ и изобразить их на координатной прямой.
6. Среди абитуриентов, выдержавших приемные экзамены в вуз, оценку “отлично” получили: по математике – 48 абитуриентов, по физике – 37, по русскому – 42, по математике или физике – 75, по математике или русскому – 76, по физике или русскому – 66, по всем трем предметам – 4. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку? Сколько из них получили только одну пятерку?
7. Изобразить на кругах Эйлера следующие множества: $(A \cup C) \setminus (B \cap C')$; $(A \cap B)' \cup (C \setminus B')$; $(A' \cup B') \setminus (C \cap B)$; $(A \cup B') \setminus (C' \cap B)$; $(A \setminus B)' \cap (C \setminus B)$; $(A \cap B') \cup (C' \setminus B)$.
8. Записать множества A и B, если известно, что $A \times B = \{(3; 1), (-3; 4), (0; 2), (1; 3), (0; 1), (5; 7), (0; 0), (5; 5)\}$. Найти $A \cap B$, $B \setminus A$. Изобразить на координатной прямой элементы множества $B \times A$. Сколько элементов содержится в каждом из множеств?
9. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 120° , $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$. Найти: $\vec{a} \bullet \vec{b}$; $(\vec{a} + \vec{b})^2$; $(\vec{a} - \vec{b})^2$; $(4\vec{a} - \vec{b}) \bullet (2\vec{a} + 3\vec{b})$.
10. В состав сборной включены 2 вратаря, 5 защитников, 6 полузащитников, 6 нападающих. Сколькими способами тренер может выставить на поле команду, в которую входит: 1 вратарь, 3 защитника, 4 полузащитника, 3 нападающих?
11. В классе 10 девочек и 14 мальчиков. Сколькими способами можно выбрать 2 девочки и одного мальчика; 5 девочек или 3 мальчиков; 10 девочек

и не менее 10 мальчиков?

12. В урне 8 белых и 12 черных шаров. Наугад один за одним извлекают два шара. Найти вероятность того, что: оба шара окажутся черными; шары будут разного цвета; первый шар будет черным?

13. В ящике находится 24 детали, причем 15 из них стандартные. Найти вероятность того, что из случайно выбранного ящика будет извлечена стандартная деталь?

14. На карточках написаны буквы “к”, “н”, “т”, “и”, “о”. Найти вероятность того, что из наугад выбранных и разложенных в ряд карточек сложится слово “ток”.

15. В ящике находится три вида деталей: 10 штук – первого, 15 – второго, 5 – третьего вида. Найти вероятность того, что из двух извлеченных деталей одна окажется первого, а другая – третьего вида.

16. Пусть $A(3;6)$ и $B(6;2)$. Найти расстояние между точками A и B , координаты середины отрезка AB , и уравнение прямой CD , проходящей через точку C – середину отрезка AB и перпендикулярной отрезку AB .

17. Вычислите: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 7x + 12}$

18. Вычислите: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{4n^2 + 6n + 7}$

19. Найдите производную следующей функции: $y = \sqrt[6]{x}(4x\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})$

20. Найдите производную следующей функции: $y = \frac{2x^5 - 6x^3 + 4}{3x^4}$

21. Найти интеграл: $\int (x^5 - 4x^2 + 8)dx$

22. Найти интеграл: $\int_1^9 x^2 \sqrt{x} dx$

23. Перевести число 1025 из десятичной в двоичную, восьмеричную, шестнадцатеричную системы счисления.

24. Перевести число 1101100010,0101 из двоичной в десятичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.

25. Выполнить все арифметические действия (+, -, *, /) с данной парой чисел: 1010110 и 11100.

26. Составить алгоритм в виде блок-схемы, а также программу на любом языке программирования для решения задачи: Дана длина окружности 25 см, вычислить площадь круга.

27. Составить алгоритм в виде блок-схемы, а также программу на любом языке программирования для решения задачи: Решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, для произвольных значений коэффициентов a , b , c ($a \neq 0$).

28. Составить алгоритм в виде блок-схемы, а также программу на любом языке программирования для решения задачи: Дано натуральное число n .

Вычислить сумму n слагаемых: $\underbrace{\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots}_n$

4.5 Список основной литературы.

- 1 Стойлова Л. П., Виленкин Н. Я., Лаврова Н. Н. Математика. 1 ч.
- 2 Стойлова Л. П., Пышкало А. М. Основы начального курса математики. М.: Просвещение, 1988.
- 3 Лаврова Н. Н., Стойлова Л. П. Задачник-практикум по математике. М.: Просвещение, 1985.
- 4 Виленкин Н. Я. и др. Задачник-практикум по математике. М.: Просвещение, 1977.
- 5 Виленкин Н. Я. и др. Математика. М.: Просвещение, 1977.
- 6 Сухотина Л. В. Математика и информатика. Учеб. пособие (для гуманитарных факультетов). Елец, ЕГПИ, 1998.
- 7 Заварыкин В. М. и др. Основы информатики и вычислительной техники: Учеб. Пособие для пед. вузов. - М.: Просвещение, 1988.
- 8 Заварыкин В. М. И др. Техника вычислений и алгоритмизация: Учеб. пособие для пед. институтов. – М.: Просвещение, 1987.
- 9 Фигурнов В. Э. IBM PC для пользователя. Краткий курс. – М.:ИНФРА–М, 1997.
- 10 Быкова Е. А., Терехов Ю. П. Программное обеспечение ЭВМ. Лабораторный практикум. Учебно-методическое пособие. – Елец, ЕГПИ, 1999, 129 с.
- 11 Быкова Е. А. Основы программирования на языке Qbasic. Учебно-методическое пособие. – Елец, 1998.

4.6 Список дополнительной литературы

- 1 Лютикас В. С. Факультативный курс по математике (теория вероятностей). М.: Просвещение, 1990.
- 2 Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1977.
- 3 Лапчик М. П. Вычислительная техника и программирование: Учеб. пособие для студентов заочных отделений физико-математ. факультетов пед. институтов. – М.: Просвещение, 1987.
- 4 Гейн А. Г. и др. Основы информатики и вычислительной техники. Проб. Учебник для 10-11 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1991. Журнал “Информатика и образование”
- 5 Макарова Н.В. Информатика: Учебник.–М.:Финансы и статистика, 1999, 768с.
- 6 Терехов Ю. П., Быкова Е. А. Электронно-вычислительные машины: основы функционирования, архитектура, программное обеспечение. Учебное пособие. – Елец: ЕГПИ, 1999, 185 с.

4.7.Использование информационных технологий

Для выполнения практических, домашних и самостоятельных работ требуются следующие средства наглядности:

- 1) Компьютеры IBM PC и соответствующее программное обеспечение
- 2) Компьютеры Yamaha и соответствующее программное обеспечение.

ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н.Я. и др. Математика: Учебное пособие для студентов пед. ин-тов по специальности 2121 - «Педагогика и методика начального обучения». - М.: Просвещение, 1977.
2. Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л. Основные понятия современного школьного курса математики. Пособие для учителей. -М.: Просвещение, 1974.
3. Кутасов А.Д., Пиголкина Т.С. и др. Пособие по математике для поступающих в вузы. Под ред. Г.Н. Яковлева. - М.: Наука, 1982.
4. Быкова Е.А., Терехов Ю.П. Программное обеспечение ЭВМ. Лабораторный практикум. Уч.-мет. пособие (для студ. физико-математического и экономического факультетов). – Елец, ЕГПИ, 1999, 129с.
5. Быкова Е.А. Основы программирования на языке Qbasic. Учебно-методическое пособие. – Елец: ЕГПИ, 1998. – 54с.
6. Информатика: Учебник. – 3-е перераб. изд. / Под ред. проф. Н.В. Макаровой. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 768с.
7. Фигурнов В.Э. IBM PC для пользователя. Изд.8-е. - С.-Петербург, АО «Коруна», 1998 - 352 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Терехов Ю.П., Быкова Е.А. Электронно-вычислительные машины: основы функционирования, архитектура, программное обеспечение. Учебное пособие (для студентов физико-математического и экономического факультетов). – Елец: ЕГПИ, 1999, 185 с.
2. Каймин В.А., Щеголев А.Г. и др. Основы информатики и вычислительной техники. Учебник для 10-11 классов. - М.: Просвещение, 1989.
3. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. - М.: Наука, 1975.-208 с.
4. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. Изд-е 2-е, испр. и доп. - М.: Наука, 1969. 159 с. с ил.
5. Гнеденко Б.В. и Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. - М.: Наука, 1982. -160 с.
6. Колмогоров А.Н. и др. Введение в теорию вероятностей. -М.: Наука, 1982.-160с.
7. Савельев Л.Я. Комбинаторика и вероятность. — Новосибирск: Наука, 1975. - 123 с.
8. Брябрин В.М. Программное обеспечение персональных ЭВМ. - 2-ое изд., стер. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. -272 с.
9. Микляев А.П. Настольная книга пользователя IBM PC. - М.: «Солон», 1997, 416 с.
10. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для педагогических институтов. – М.: Высш. школа, 1979. – 559 с.
11. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, том 1. – М.: Гос. из-во физ-мат лит., 1960. – 440 с.
12. Математика в понятиях, определениях и терминах. ч.1 — Пособие для учителей. Под ред. Л.В. Сабинаина. - М.: Просвещение, 1978. - 320 с.
13. Математика в понятиях, определениях и терминах. ч.2. О.В. Мантуров, Ю.К. Солнцев, КХР Соркин, Н.Г. Федин. Под ред. Л.В. Сабинаина - М: Просвещение, 1982. - 351 с.

СОДЕРЖАНИЕ:

Введение.....	3
§1. Математические предложения и доказательства.....	4
Примеры.....	8
Задачи для самостоятельной работы.....	8
§2. Элементы теории множеств.....	9
п.1 Понятие множества.....	9
п.2 Подмножества. Основные числовые множества.....	10
п.3 Операции над множествами.....	11
п.4 Диаграммы Эйлера-Венна.....	13
Примеры.....	14
Задачи для самостоятельной работы.....	15
§3. Декартово произведение множеств. Соответствия. Бинарные отношения и их свойства. Отображения.....	17
Примеры.....	22
Задачи для самостоятельной работы.....	23
§4. Элементы комбинаторики. Соединения без повторений и с повторениями. Правила суммы и произведения.....	24
п.1 Соединения без повторений.....	24
п.2 Соединения с повторениями.....	25
п.3 Правила суммы и произведения.....	26
Примеры.....	27
Задачи для самостоятельной работы.....	29
§5. Элементы теории вероятностей.....	30
п.1 Классическое и статистическое определения вероятности..	30
п.2 Сумма событий. Теорема сложения вероятностей.....	32
п.3 Произведение событий. Теорема умножения вероятностей.....	33
п.4 Формула полной вероятности. Формула Байесса. Формула Бернулли.....	35
Задачи для самостоятельной работы.....	36
§6. Элементы векторной алгебры.....	37
Примеры.....	39
Задачи для самостоятельной работы.....	40
§7. Элементы аналитической геометрии.....	41
Задачи для самостоятельной работы.....	45
§ 8. Основы математического анализа.....	46
п.1 Функции и последовательности.....	46
п.2 Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.....	49
п.3 Предел последовательности.....	50
п.4 Предел функции.....	50
п.5 Приращение, дифференциал и производная функции.....	52
п.6 Формулы дифференцирования.....	54
п.7 Неопределенный интеграл.....	54

п.8 Определенный интеграл.....	55
Задачи для самостоятельной работы.....	56
§ 9. Информация и информационные процессы.....	57
п.1 Понятие об информации. Носители информации. Количественная мера информации. Кодирование информации	57
п.2 Понятие о системах счисления. Системы счисления, применяемые в цифровых ЭВМ.....	60
п.3 Перевод чисел из одной с.с. в другую	63
п.4 Арифметика двоичных чисел	66
Задачи для самостоятельной работы.....	67
§10 Архитектура ЭВМ. Программное обеспечение ЭВМ	68
п.1 Этапы развития вычислительной техники	68
п.2 Поколения ЭВМ.....	69
п.3 Архитектура ЭВМ.....	69
п.4 Персональный компьютер IBM PC: принцип открытой архитектуры, основные узлы, их назначение и характеристики.....	70
п.5 Программное обеспечение.....	75
§11 Алгоритм и его свойства. Методика составления алгоритмов	79
п.1 Понятие алгоритма. Свойства алгоритмов. Способы задания алгоритмов.....	79
п.2. Типы алгоритмов	82
п.3 Базовые алгоритмические структуры	84
п.4. Основные этапы решения задач на ЭВМ	86
п.5. Алфавит языка Бейсик. Основные математические функции языка Бейсик. Основные операторы языка Бейсик	87
п.6. Методика составления программ на языке программирования Бейсик	89
Задачи для самостоятельной работы.....	94
Приложение 1. Государственный стандарт для дисциплины “Математика и информатика” по гуманитарным специальностям	95
Приложение 2. Рабочая программа по дисциплине “математика и информатика”	95
Литература	106

Пожалуйста, Ваши замечания и пожелания отдайте
авторам учебного пособия. Заранее Спасибо!



Учебное издание

Филимонова Лилия Владимировна,
Быкова Ева Анатольевна

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Учебное пособие
для студентов гуманитарных факультетов

Технический редактор – Безногих Н.П.

Компьютерный набор – Сухотина Л.В., Быкова Е.А.

Компьютерная верстка – Быкова Е.А., Сухотина Л.В.

Лицензия ЛР № 020033. Дата выдачи 04.12.96.

Формат 60 x 84 1/6

усл.-печ.л.

Тираж 300 экз.

уч.изд.л.

Печать трафаретная

заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

399740 г.Елец, ул. Ленина, 91